

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>19</b>
1.1 Logik und Mengen	19
1.1.1 Aussagenlogik	19
1.1.2 Mengen	22
1.2 Zahlen	25
1.2.1 Natürliche Zahlen	25
1.2.2 Ganze Zahlen	26
1.2.3 Rationale Zahlen	27
1.2.4 Reelle Zahlen	28
1.2.5 Ordnung	30
1.2.6 Intervalle	31
1.2.7 Betrag und Signum	32
1.2.8 Summe und Produkt	35
1.3 Potenz und Wurzel	36
1.3.1 Potenzen	36
1.3.2 Potenzgesetze	37
1.3.3 Wurzeln	37
1.3.4 Binomischer Satz	38
1.4 Trigonometrie	40
1.4.1 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck	40
1.4.2 Winkel im Grad- und Bogenmaß	42
1.4.3 Sinus- und Kosinussatz	43
1.5 Gleichungen und Ungleichungen	44
1.5.1 Lineare Gleichungen	45
1.5.2 Potenzgleichungen	46
1.5.3 Quadratische Gleichungen	46
1.5.4 Wurzelgleichungen	48
1.5.5 Ungleichungen	49
1.6 Beweise	51
1.6.1 Direkter Beweis	52
1.6.2 Indirekter Beweis	52
1.6.3 Konstruktiver Beweis	53
1.6.4 Vollständige Induktion	54
1.7 Aufgaben	56
1.7.1 Verständnis und Kompetenz	56
1.7.2 Rechnung und Training	57
1.7.3 Anwendung	60

<b>2</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>61</b>
2.1	Einführung	61
2.2	Gauß-Algorithmus	63
2.2.1	Äquivalenzumformungen	64
2.2.2	Vorwärtselemination	65
2.2.3	Rückwärtseinsetzen	66
2.2.4	Gaußsches Eliminationsverfahren	67
2.2.5	Rechenschema	68
2.3	Spezielle Typen linearer Gleichungssysteme	70
2.3.1	Lineare Gleichungssysteme ohne Lösung	70
2.3.2	Lineare Gleichungssysteme mit unendlich vielen Lösungen	71
2.3.3	Systeme mit redundanten Gleichungen	72
2.3.4	Unterbestimmte lineare Gleichungssysteme	73
2.3.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	74
2.3.6	Homogene lineare Gleichungssysteme	75
2.3.7	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	77
2.4	Numerische Verfahren	79
2.4.1	Jacobi-Iteration	79
2.4.2	Gauß-Seidel-Iteration	80
2.5	Anwendungen	81
2.5.1	Produktion	81
2.5.2	Netzwerkanalyse in der Elektrotechnik	82
2.6	Aufgaben	83
2.6.1	Verständnis und Kompetenz	83
2.6.2	Rechnung und Training	83
2.6.3	Anwendung	84
<b>3</b>	<b>Vektoren</b>	<b>85</b>
3.1	Der Begriff eines Vektors	85
3.2	Vektorrechnung ohne Koordinaten	87
3.2.1	Addition und Subtraktion	87
3.2.2	Skalare Multiplikation	89
3.2.3	Skalarprodukt	90
3.2.4	Vektorprodukt	94
3.2.5	Spatprodukt	96
3.2.6	Lineare Unabhängigkeit	98
3.3	Vektoren in Koordinatendarstellung	102
3.3.1	Koordinatendarstellung	103
3.3.2	Addition und Subtraktion	104
3.3.3	Skalare Multiplikation	105
3.3.4	Skalarprodukt	105
3.3.5	Vektorprodukt	107
3.3.6	Spatprodukt	109
3.3.7	Lineare Unabhängigkeit	109
3.4	Punkte, Geraden und Ebenen	112
3.4.1	Kartesisches Koordinatensystem	112

3.4.2	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen . . . . .	114
3.4.3	Parameterfreie Darstellung von Geraden und Ebenen . . . . .	116
3.4.4	Schnitte von Geraden und Ebenen . . . . .	117
3.4.5	Abstände . . . . .	119
3.4.6	Winkel . . . . .	122
3.5	Anwendungen . . . . .	124
3.5.1	Kraft . . . . .	124
3.5.2	Arbeit . . . . .	124
3.5.3	Drehmoment . . . . .	125
3.6	Aufgaben . . . . .	126
3.6.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	126
3.6.2	Rechnung und Training . . . . .	127
3.6.3	Anwendung . . . . .	130
<b>4</b>	<b>Matrizen</b> . . . . .	<b>131</b>
4.1	Der Begriff einer Matrix . . . . .	131
4.2	Rechnen mit Matrizen . . . . .	135
4.2.1	Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation . . . . .	136
4.2.2	Multiplikation von Matrizen . . . . .	137
4.3	Determinanten . . . . .	143
4.3.1	Determinante einer (2,2)-Matrix . . . . .	143
4.3.2	Determinante einer (3,3)-Matrix . . . . .	145
4.3.3	Determinante einer (n,n)-Matrix . . . . .	149
4.4	Inverse Matrix . . . . .	152
4.4.1	Invertierbare Matrizen . . . . .	153
4.4.2	Inverse einer (2,2)-Matrix . . . . .	154
4.4.3	Inverse Matrix und lineares Gleichungssystem . . . . .	155
4.4.4	Orthogonale Matrizen . . . . .	155
4.5	Lineare Abbildungen . . . . .	156
4.5.1	Matrizen als Abbildungen . . . . .	156
4.5.2	Koordinatentransformation . . . . .	158
4.5.3	Kern, Bild und Rang . . . . .	159
4.6	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	160
4.7	Numerische Verfahren . . . . .	166
4.7.1	Potenzmethode . . . . .	166
4.8	Anwendungen . . . . .	167
4.8.1	Computergrafik . . . . .	168
4.9	Aufgaben . . . . .	169
4.9.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	169
4.9.2	Rechnung und Training . . . . .	170
4.9.3	Anwendung . . . . .	172
<b>5</b>	<b>Funktionen</b> . . . . .	<b>173</b>
5.1	Relationen und Funktionen . . . . .	173
5.1.1	Relationen . . . . .	173
5.1.2	Funktionen . . . . .	174

5.2	Reelle Funktionen . . . . .	176
5.2.1	Definitionsmenge, Zielmenge und Wertemenge . . . . .	176
5.2.2	Wertetabelle und Schaubild . . . . .	178
5.2.3	Explizite und implizite Darstellung . . . . .	180
5.2.4	Abschnittsweise definierte Funktionen . . . . .	181
5.2.5	Funktionsschar . . . . .	183
5.2.6	Verkettung von Funktionen . . . . .	184
5.3	Eigenschaften . . . . .	187
5.3.1	Symmetrie . . . . .	188
5.3.2	Periode . . . . .	191
5.3.3	Monotonie . . . . .	192
5.3.4	Beschränktheit . . . . .	193
5.4	Das Prinzip der Umkehrfunktion . . . . .	194
5.5	Anwendungen . . . . .	197
5.5.1	Messwerte . . . . .	197
5.5.2	Kennfelder . . . . .	198
5.6	Aufgaben . . . . .	199
5.6.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	199
5.6.2	Rechnung und Training . . . . .	200
<b>6</b>	<b>Elementare Funktionen</b> . . . . .	<b>201</b>
6.1	Potenz- und Wurzelfunktionen . . . . .	201
6.1.1	Potenzfunktionen . . . . .	201
6.1.2	Wurzelfunktionen . . . . .	203
6.2	Polynome und gebrochenrationale Funktionen . . . . .	204
6.2.1	Polynome . . . . .	204
6.2.2	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	212
6.3	Sinus, Kosinus, Tangens und Arkusfunktionen . . . . .	220
6.3.1	Definition am Einheitskreis . . . . .	220
6.3.2	Eigenschaften . . . . .	221
6.3.3	Allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion . . . . .	224
6.3.4	Arkusfunktionen . . . . .	226
6.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen . . . . .	231
6.4.1	Exponentialfunktionen . . . . .	231
6.4.2	Die e-Funktion . . . . .	232
6.4.3	Logarithmusfunktionen . . . . .	234
6.5	Hyperbel- und Areafunktionen . . . . .	237
6.5.1	Hyperbelfunktionen . . . . .	237
6.5.2	Areafunktionen . . . . .	239
6.6	Anwendungen . . . . .	240
6.6.1	Freileitungen . . . . .	240
6.6.2	Industrieroboter . . . . .	241
6.7	Aufgaben . . . . .	242
6.7.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	242
6.7.2	Rechnung und Training . . . . .	243
6.7.3	Anwendung . . . . .	244

<b>7 Folgen, Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>245</b>
7.1 Folgen	245
7.1.1 Zahlenfolgen	245
7.1.2 Grenzwert einer Folge	249
7.2 Funktionsgrenzwerte	253
7.3 Stetigkeit	255
7.4 Asymptotisches Verhalten	260
7.5 Numerische Verfahren	264
7.5.1 Berechnung von Funktionswerten	265
7.5.2 Bisektionsverfahren	266
7.6 Anwendungen	268
7.6.1 Kapital und Zinsen	268
7.7 Aufgaben	269
7.7.1 Verständnis und Kompetenz	269
7.7.2 Rechnung und Training	270
<b>8 Differenzialrechnung</b>	<b>271</b>
8.1 Steigung und Ableitungsfunktion	271
8.1.1 Tangente und Differenzierbarkeit	271
8.1.2 Differenzial	275
8.1.3 Ableitungsfunktion	276
8.1.4 Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	279
8.1.5 Höhere Ableitungen	280
8.2 Ableitungstechnik	281
8.2.1 Ableitungsregeln	281
8.2.2 Ableitung der Umkehrfunktion	286
8.2.3 Logarithmisches Differenzieren	288
8.2.4 Implizites Differenzieren	289
8.2.5 Zusammenfassung	290
8.3 Regel von Bernoulli-de l'Hospital	291
8.4 Geometrische Bedeutung der Ableitungen	295
8.4.1 Neigungswinkel und Schnittwinkel	295
8.4.2 Monotonie	297
8.4.3 Krümmung	298
8.4.4 Lokale Extrema	299
8.4.5 Wendepunkte	303
8.4.6 Globale Extrema	304
8.5 Numerische Verfahren	305
8.5.1 Numerische Differenziation	306
8.5.2 Newton-Verfahren	307
8.5.3 Sekantenverfahren	309
8.6 Anwendungen	310
8.6.1 Fehlerrechnung	310
8.6.2 Extremwertaufgaben	312
8.6.3 Momentan- und Durchschnittsgeschwindigkeit	314

8.7	Aufgaben . . . . .	315
8.7.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	315
8.7.2	Rechnung und Training . . . . .	316
8.7.3	Anwendung . . . . .	319
<b>9</b>	<b>Integralrechnung</b> . . . . .	<b>321</b>
9.1	Flächenproblem . . . . .	321
9.1.1	Integralsymbol . . . . .	321
9.1.2	Integral als Grenzwert von Summen . . . . .	322
9.1.3	Bestimmtes Integral . . . . .	324
9.2	Zusammenhang von Ableitung und Integral . . . . .	325
9.2.1	Integralfunktion . . . . .	325
9.2.2	Stammfunktion . . . . .	327
9.2.3	Bestimmtes Integral und Stammfunktion . . . . .	329
9.2.4	Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	330
9.3	Integriertechnik . . . . .	332
9.3.1	Integrationsregeln . . . . .	332
9.3.2	Integration durch Substitution . . . . .	336
9.3.3	Partielle Integration . . . . .	343
9.3.4	Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	345
9.3.5	Uneigentliche Integrale . . . . .	348
9.4	Länge, Flächeninhalt und Volumen . . . . .	351
9.4.1	Flächeninhalte . . . . .	351
9.4.2	Bogenlänge . . . . .	353
9.4.3	Rotationskörper . . . . .	355
9.5	Numerische Verfahren . . . . .	359
9.5.1	Trapezregel . . . . .	360
9.5.2	Romberg-Verfahren . . . . .	362
9.6	Anwendungen . . . . .	362
9.6.1	Effektivwert . . . . .	362
9.6.2	Schwerpunkte und statische Momente ebener Flächen . . . . .	363
9.7	Aufgaben . . . . .	367
9.7.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	367
9.7.2	Rechnung und Training . . . . .	368
9.7.3	Anwendung . . . . .	370
<b>10</b>	<b>Potenzreihen</b> . . . . .	<b>371</b>
10.1	Einführung . . . . .	371
10.2	Unendliche Reihen . . . . .	372
10.3	Potenzreihen und Konvergenz . . . . .	376
10.4	Taylor-Reihen . . . . .	377
10.5	Eigenschaften . . . . .	379
10.6	Numerische Verfahren . . . . .	385
10.6.1	Berechnung von Funktionswerten . . . . .	385
10.7	Anwendungen . . . . .	386
10.7.1	Normalverteilung in der Statistik . . . . .	386

10.8	Aufgaben . . . . .	387
10.8.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	387
10.8.2	Rechnung und Training . . . . .	387
10.8.3	Anwendung . . . . .	388
<b>11</b>	<b>Kurven</b> . . . . .	<b>389</b>
11.1	Parameterdarstellung . . . . .	389
11.2	Kegelschnitte . . . . .	392
11.3	Tangente . . . . .	398
11.4	Krümmung . . . . .	400
11.5	Bogenlänge . . . . .	405
11.6	Numerische Verfahren . . . . .	407
11.6.1	Bézier-Kurve . . . . .	407
11.7	Anwendungen . . . . .	409
11.7.1	Mechanik . . . . .	409
11.7.2	Straßenbau . . . . .	410
11.8	Aufgaben . . . . .	412
11.8.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	412
11.8.2	Rechnung und Training . . . . .	413
11.8.3	Anwendung . . . . .	414
<b>12</b>	<b>Funktionen mit mehreren Variablen</b> . . . . .	<b>415</b>
12.1	Definition und Darstellung . . . . .	415
12.1.1	Definition einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	415
12.1.2	Schaubild einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	416
12.1.3	Schnittkurven mit Ebenen und Höhenlinien . . . . .	416
12.2	Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	420
12.2.1	Grenzwert einer Funktion mit mehreren Variablen . . . . .	420
12.2.2	Stetigkeit . . . . .	421
12.3	Differenziation . . . . .	422
12.3.1	Partielle Ableitungen und partielle Differenzierbarkeit . . . . .	422
12.3.2	Differenzierbarkeit und Tangentialebene . . . . .	425
12.3.3	Gradient und Richtungsableitung . . . . .	427
12.3.4	Differenzial . . . . .	430
12.3.5	Höhere partielle Ableitungen . . . . .	433
12.3.6	Extremwerte . . . . .	435
12.4	Ausgleichsrechnung . . . . .	437
12.4.1	Methode der kleinsten Fehlerquadrate . . . . .	437
12.4.2	Ausgleichsrechnung mit Polynomen . . . . .	438
12.4.3	Lineare Ausgleichsrechnung . . . . .	442
12.5	Vektorwertige Funktionen . . . . .	444
12.6	Numerische Verfahren . . . . .	445
12.6.1	Mehrdimensionales Newton-Verfahren . . . . .	445
12.6.2	Gradientenverfahren . . . . .	447
12.7	Anwendungen . . . . .	449
12.7.1	Fehlerrechnung . . . . .	449

12.8	Aufgaben . . . . .	451
12.8.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	451
12.8.2	Rechnung und Training . . . . .	451
12.8.3	Anwendung . . . . .	452
<b>13</b>	<b>Komplexe Zahlen und Funktionen</b>	<b>453</b>
13.1	Definition und Darstellung . . . . .	453
13.1.1	Komplexe Zahlen . . . . .	453
13.1.2	Gaußsche Zahlenebene . . . . .	454
13.1.3	Polarkoordinaten . . . . .	455
13.1.4	Exponentialform . . . . .	457
13.2	Rechenregeln . . . . .	459
13.2.1	Gleichheit . . . . .	459
13.2.2	Addition und Subtraktion . . . . .	459
13.2.3	Multiplikation und Division . . . . .	460
13.2.4	Rechnen mit der konjugiert komplexen Zahl . . . . .	462
13.2.5	Rechnen mit dem Betrag einer komplexen Zahl . . . . .	462
13.3	Potenzen, Wurzeln und Polynome . . . . .	464
13.3.1	Potenzen . . . . .	465
13.3.2	Wurzeln . . . . .	465
13.3.3	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	468
13.4	Komplexe Funktionen . . . . .	470
13.4.1	Ortskurven . . . . .	471
13.4.2	Harmonische Schwingungen . . . . .	472
13.4.3	Transformationen . . . . .	476
13.5	Anwendungen . . . . .	480
13.5.1	Komplexe Wechselstromrechnung . . . . .	480
13.6	Aufgaben . . . . .	481
13.6.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	481
13.6.2	Rechnung und Training . . . . .	481
13.6.3	Anwendung . . . . .	482
<b>14</b>	<b>Gewöhnliche Differenzialgleichungen</b>	<b>483</b>
14.1	Einführung . . . . .	483
14.1.1	Grundbegriffe . . . . .	483
14.1.2	Anfangswert- und Randwertproblem . . . . .	486
14.1.3	Richtungsfeld und Orthogonaltrajektorie . . . . .	488
14.1.4	Differenzialgleichung und Funktionsschar . . . . .	490
14.2	Differenzialgleichungen erster Ordnung . . . . .	491
14.2.1	Separation der Variablen . . . . .	492
14.2.2	Lineare Substitution . . . . .	494
14.2.3	Ähnlichkeitsdifferenzialgleichungen . . . . .	495
14.3	Lineare Differenzialgleichungen . . . . .	496
14.3.1	Homogene und inhomogene lineare Differenzialgleichungen . . . . .	496
14.3.2	Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung . . . . .	499
14.3.3	Allgemeine Eigenschaften . . . . .	503



14.3.4	Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	506
14.4	Schwingungsdifferenzialgleichungen . . . . .	519
14.4.1	Allgemeine Form . . . . .	519
14.4.2	Freie Schwingung . . . . .	520
14.4.3	Harmonisch angeregte Schwingung . . . . .	522
14.4.4	Frequenzgänge . . . . .	526
14.5	Differenzialgleichungssysteme . . . . .	528
14.5.1	Eliminationsverfahren . . . . .	528
14.5.2	Zustandsvariablen . . . . .	530
14.5.3	Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	532
14.5.4	Lineare Differenzialgleichung als System . . . . .	539
14.5.5	Stabilität . . . . .	540
14.6	Numerische Verfahren . . . . .	544
14.6.1	Polygonzugverfahren von Euler . . . . .	544
14.6.2	Euler-Verfahren für Differenzialgleichungssysteme . . . . .	546
14.7	Anwendungen . . . . .	547
14.7.1	Temperaturverlauf . . . . .	547
14.7.2	Radioaktiver Zerfall . . . . .	548
14.7.3	Freier Fall mit Luftwiderstand . . . . .	548
14.7.4	Feder-Masse-Schwinger . . . . .	549
14.7.5	Pendel . . . . .	550
14.7.6	Wechselstromkreise . . . . .	550
14.8	Aufgaben . . . . .	553
14.8.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	553
14.8.2	Rechnung und Training . . . . .	555
14.8.3	Anwendung . . . . .	558
<b>15</b>	<b>Differenzengleichungen</b> . . . . .	<b>559</b>
15.1	Lineare Differenzengleichungen . . . . .	559
15.1.1	Differenzengleichungen erster Ordnung . . . . .	561
15.1.2	Differenzengleichungen höherer Ordnung . . . . .	563
15.2	Systeme linearer Differenzengleichungen . . . . .	567
15.2.1	Homogene Systeme erster Ordnung . . . . .	568
15.2.2	Inhomogene Systeme erster Ordnung . . . . .	570
15.2.3	Asymptotisches Verhalten . . . . .	571
15.3	Anwendungen . . . . .	573
15.3.1	Darlehen . . . . .	573
15.4	Aufgaben . . . . .	574
15.4.1	Rechnung und Training . . . . .	574
15.4.2	Anwendung . . . . .	574
<b>16</b>	<b>Fourier-Reihen</b> . . . . .	<b>575</b>
16.1	Fourier-Analyse . . . . .	575
16.1.1	Periodische Funktionen . . . . .	575
16.1.2	Trigonometrische Polynome . . . . .	577
16.1.3	Fourier-Reihe . . . . .	579

16.1.4	Satz von Fourier	580
16.1.5	Gibbssches Phänomen	583
16.2	Komplexe Darstellung	585
16.2.1	Komplexe Fourier-Reihe	585
16.2.2	Berechnung komplexer Fourier-Koeffizienten	587
16.2.3	Spektrum	589
16.2.4	Minimaleigenschaft	592
16.3	Eigenschaften	594
16.3.1	Symmetrie	594
16.3.2	Integrationsintervall	595
16.3.3	Mittelwert	596
16.3.4	Linearität	596
16.3.5	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	598
16.3.6	Zeitverschiebung	599
16.4	Aufgaben	601
16.4.1	Verständnis und Kompetenz	601
16.4.2	Rechnung und Training	601
<b>17</b>	<b>Verallgemeinerte Funktionen</b>	<b>603</b>
17.1	Heaviside-Funktion	603
17.2	Dirac-Distribution	605
17.3	Verallgemeinerte Ableitung	607
17.4	Faltung	609
17.5	Anwendungen	613
17.5.1	B-Splines	613
17.6	Aufgaben	614
17.6.1	Verständnis und Kompetenz	614
17.6.2	Rechnung und Training	614
<b>18</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>615</b>
18.1	Integraltransformation	615
18.1.1	Definition	615
18.1.2	Darstellung mit Real- und Imaginärteil	617
18.1.3	Sinus- und Kosinustransformation	619
18.1.4	Transformation gerader und ungerader Funktionen	620
18.1.5	Darstellung mit Amplitude und Phase	622
18.2	Eigenschaften	623
18.2.1	Linearität	624
18.2.2	Zeitverschiebung	625
18.2.3	Amplitudenmodulation	627
18.2.4	Ähnlichkeit und Zeitumkehr	629
18.3	Inverse Fourier-Transformation	630
18.3.1	Definition	630
18.3.2	Vertauschungssatz	632
18.3.3	Linearität	633

18.4	Differenziation, Integration und Faltung . . . . .	633
18.4.1	Differenziation im Zeitbereich . . . . .	633
18.4.2	Differenziation im Frequenzbereich . . . . .	635
18.4.3	Multiplikationssatz . . . . .	635
18.4.4	Integration . . . . .	636
18.4.5	Faltung . . . . .	637
18.5	Periodische Funktionen . . . . .	637
18.5.1	Fourier-Transformation einer Fourier-Reihe . . . . .	638
18.5.2	Koeffizienten der Fourier-Reihe . . . . .	638
18.5.3	Grenzwertbetrachtung . . . . .	640
18.6	Anwendungen . . . . .	642
18.6.1	Lineare zeitinvariante Systeme . . . . .	642
18.6.2	Tiefpassfilter . . . . .	644
18.7	Aufgaben . . . . .	646
18.7.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	646
18.7.2	Rechnung und Training . . . . .	648
18.7.3	Anwendung . . . . .	648
<b>19</b>	<b>Laplace-Transformation</b> . . . . .	<b>649</b>
19.1	Bildbereich . . . . .	649
19.1.1	Definition . . . . .	649
19.1.2	Laplace- und Fourier-Transformation . . . . .	652
19.2	Eigenschaften . . . . .	653
19.2.1	Linearität . . . . .	653
19.2.2	Ähnlichkeit . . . . .	654
19.2.3	Zeitverschiebung . . . . .	655
19.2.4	Dämpfung . . . . .	656
19.3	Differenziation, Integration und Faltung . . . . .	657
19.3.1	Differenziation . . . . .	657
19.3.2	Integration . . . . .	659
19.3.3	Faltung . . . . .	660
19.3.4	Grenzwerte . . . . .	661
19.4	Transformation periodischer Funktionen . . . . .	661
19.5	Rücktransformation . . . . .	663
19.6	Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen . . . . .	664
19.7	Anwendungen . . . . .	670
19.7.1	Regelungstechnik . . . . .	670
19.8	Aufgaben . . . . .	673
19.8.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	673
19.8.2	Rechnung und Training . . . . .	674
19.8.3	Anwendung . . . . .	674
<b>20</b>	<b>z-Transformation</b> . . . . .	<b>675</b>
20.1	Transformation diskreter Signale . . . . .	675
20.1.1	Definition . . . . .	675
20.1.2	z-Transformation und Laplace-Transformation . . . . .	677

20.2	Eigenschaften . . . . .	678
20.2.1	Linearität . . . . .	678
20.2.2	Dämpfung . . . . .	679
20.2.3	Verschiebung . . . . .	679
20.2.4	Vorwärtsdifferenzen . . . . .	681
20.2.5	Multiplikationssatz . . . . .	682
20.2.6	Diskrete Faltung . . . . .	682
20.3	Lösung von Differenzgleichungen . . . . .	684
20.4	Anwendungen . . . . .	687
20.4.1	Zeitkomplexität von Quicksort . . . . .	687
20.5	Aufgaben . . . . .	689
20.5.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	689
20.5.2	Rechnung und Training . . . . .	689
20.5.3	Anwendung . . . . .	690
21	Elementare Zahlentheorie . . . . .	691
21.1	Teilbarkeit . . . . .	691
21.2	Kongruente Zahlen . . . . .	695
21.3	Primzahlen . . . . .	700
21.4	Anwendungen . . . . .	704
21.4.1	International Bank Account Number (IBAN) . . . . .	704
21.4.2	Linearer Kongruenzgenerator für Pseudozufallszahlen . . . . .	705
21.5	Aufgaben . . . . .	706
21.5.1	Verständnis und Kompetenz . . . . .	706
21.5.2	Rechnung und Training . . . . .	706
A	Anhang . . . . .	707
A.1	Bedeutende Mathematiker . . . . .	707
A.2	Trigonometrische Funktionen . . . . .	726
A.3	Ableitungen . . . . .	728
A.4	Integrale . . . . .	729
A.5	Ableitungsregeln und Integralregeln . . . . .	732
A.6	Potenzreihen . . . . .	733
A.7	Fourier-Reihen . . . . .	734
A.8	Korrespondenzen der Fourier-Transformation . . . . .	736
A.9	Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .	738
A.10	Korrespondenzen der Laplace-Transformation . . . . .	739
A.11	Eigenschaften der Laplace-Transformation . . . . .	740
A.12	Korrespondenzen der z-Transformationen . . . . .	741
A.13	Eigenschaften der z-Transformationen . . . . .	741
A.14	Griechisches Alphabet . . . . .	742
	Literaturverzeichnis . . . . .	743
	Sachwortverzeichnis . . . . .	745