

Kapitel 6

Kombinierte Beanspruchung

Lernziele

Die Studierenden sollen

- das Superpositionsprinzip erklären und auf Strukturen unter kombinierter Beanspruchung anwenden und
- resultierende Spannungszustände bei kombinierter Beanspruchung bestimmen können,
- die wesentlichen Festigkeitshypothesen und deren jeweiliges Anwendungsgebiet benennen und
- die Versagengrenzen bzw. die Sicherheit gegen Versagen bei kombinierter Beanspruchung bestimmen können.

6.1 Einführung

In den vorangehenden Kapiteln haben wir die Grundbeanspruchungen von balkenförmigen Bauteilen einzeln untersucht. Es handelt sich um Zug-/Druckbeanspruchungen infolge der Längskraft N , Biegebeanspruchungen durch die Momente M_{b_y} sowie M_{b_z} und um Schubbeanspruchungen infolge von Querkräften (Q_y sowie Q_z) und eines Torsionsmomentes T . In realen Strukturen treten diese Beanspruchungen gewöhnlich gemeinsam auf. Um die Tragfähigkeit einer Struktur bewerten zu können, müssen wir daher die einzelnen Beanspruchungen überlagern bzw. miteinander kombinieren. Da wir bisher lineares Strukturverhalten vorausgesetzt haben, können wir das *Superpositionsprinzip* anwenden. Dieses besagt, dass wir lineare Beanspruchungen, die aus verschiedenen äußeren Belastungen resultieren, addieren dürfen. Beispielsweise addieren wir die Normalspannungen aus einer reinen Zug- und einer Biegebeanspruchung zu einer Gesamtspannung. Als Folge erhalten wir also die Beanspruchung der Struktur unter allen aufgebracht Lasten. Analog können wir das Superpositionsprinzip bei der Ermittlung der Gesamtverformung der

Struktur anwenden, d. h. die Gesamtverformung resultiert wieder aus der Überlagerung der einzelnen Verformungen. Wir konzentrieren uns an dieser Stelle jedoch auf die Tragfähigkeit von Strukturen bzw. auf die Superposition von Kraftgrößen, da wir den Spannungszustand zur Beurteilung der Tragfähigkeit heranziehen werden. Wir betrachten hier also Festigkeitsprobleme und lassen weitere Versagensphänomene z. B. infolge von Stabilitätseffekten (vgl. hierzu Kap. 8) zunächst unbeachtet.

Bei der Vorhersage der Tragfähigkeit infolge eines Festigkeitsproblems stellt die Überlagerung der Einzelbeanspruchungen nur den ersten Schritt dar. In einem zweiten Schritt müssen wir die Frage klären, bei welcher kombinierten Beanspruchung und damit einhergehendem resultierenden Spannungszustand Versagen der Struktur auftritt. Diese Frage lässt sich nicht allgemeingültig für beliebige Beanspruchungskombinationen und Werkstoffe beantworten. Aus diesem Grunde behilft man sich mit sogenannten *Festigkeithypothesen*, die eine Beziehung zwischen dem Spannungszustand in der untersuchten Struktur und einer zulässigen Spannung herstellen. Die zulässige Spannung wird dabei gewöhnlich in einem einachsigen Belastungsversuch ermittelt.

Das zuvor beschriebene Vorgehen zur Bewertung der Tragfähigkeit einer Struktur werden wir hier exemplarisch anhand des bereits in der Einleitung vorgestellten Flugzeugflügels demonstrieren. Die Flügelstruktur und die Anbindung des Flügels an den Rumpf sind in Abb. 6.1 dargestellt. Die Flugrichtung ist durch die positive \bar{y} -Richtung gekennzeichnet. Die Struktur ist über gelenkige Lagerungen in den Punkten A und B sowie über eine Flügelstütze zwischen den Punkten E und F mit dem Rumpf verbunden. Der Flügelquerschnitt möge sich wölbspannungsfrei verformen können. Die angenommene äußere Belastung bzw. die Luftkraft q_L ist ebenfalls

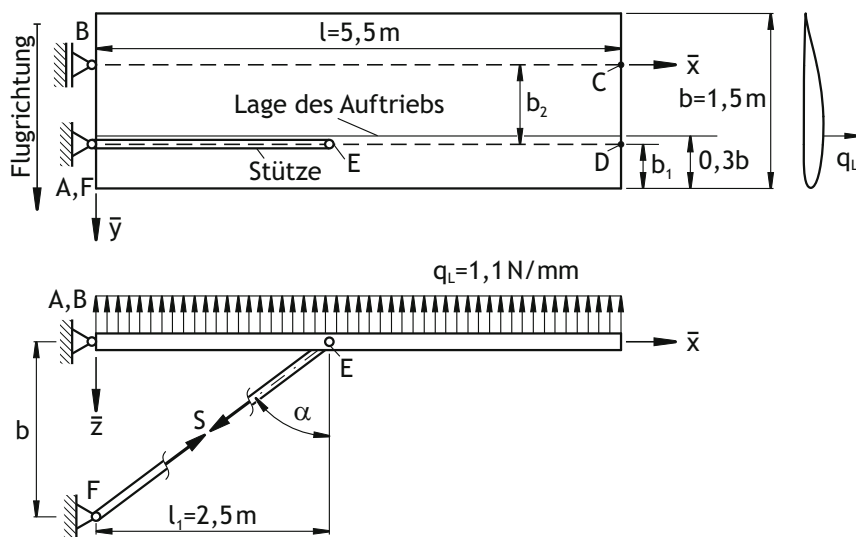


Abb. 6.1 Flügelstruktur und Rumpfanbindung sowie äußere Luftlast q_L und Stabkraft S

dargestellt. Sie möge konstant entlang der \bar{x} -Achse sein, der Einfachheit halber momentenfrei bei 30 % der Flügeltiefe b wirken und in negative \bar{z} -Richtung weisen. Folglich lassen wir hier die Widerstandsanteile in der Luftkraft unberücksichtigt. Darüber hinaus vernachlässigen wir das Gewicht des Flügels, um die mechanischen Zusammenhänge möglichst übersichtlich zu halten. Bemerkte sei außerdem, dass die Bezeichnungen für die Achsen des verwendeten Koordinatensystems in Übereinstimmung mit der Definition der Achsen für Balkenstrukturen nach Kap. 3 gewählt sind, d. h. die \bar{x} -Achse weist in Flügelspanweitenrichtung. Es handelt sich also nicht um ein übliches Flugzeugkoordinatensystem.

Die beschriebene Flügelidealisierung weist alle Grundbeanspruchungen infolge der äußeren Luftlast auf und eignet sich daher zur Veranschaulichung des Superpositionsprinzips im Abschnitt 6.2. Basierend auf der ermittelten kombinierten Beanspruchung werden wir dann Festigkeitshypothesen im Abschnitt 6.3 kennen lernen, um die Tragfähigkeit dieser Struktur abzuschätzen.

6.2 Superpositionsprinzip

Das Superpositionsprinzip wenden wir auf den Tragflügel mit dem Profil gemäß Abb. 6.2a) an. Es handelt sich um einen Rechteckflügel, dessen tragende Struktur aus einer Zelle besteht. Um die nachfolgenden Ableitungen möglichst übersichtlich zu gestalten, modellieren wir diese Zelle als dünnwandige, symmetrische Struktur, wie sie in Abb. 6.2b) skizziert ist. Die Versteifungsprofile auf der Ober- und Unterseite werden aus Stabilitätsgründen verwendet. Da wir in diesem Kapitel Stabilitätsphänomene nicht betrachten, verschmieren wir die Profilflächen auf die Deckbleche

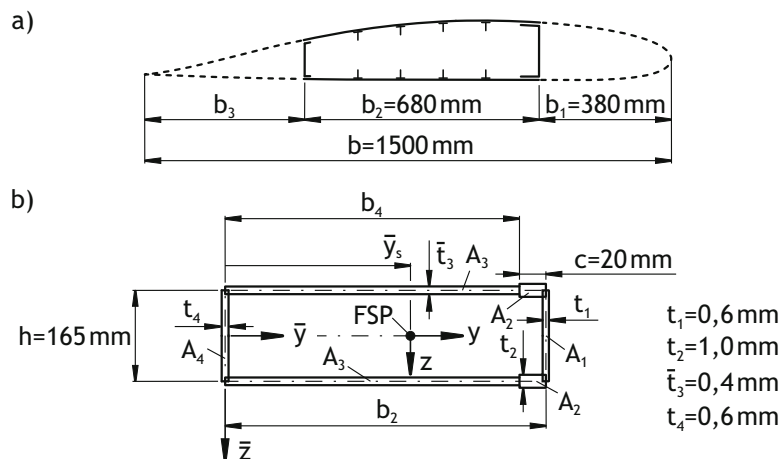


Abb. 6.2 a) Flügelquerschnitt, b) idealisierte Struktur unter Beachtung leichtbaugerechter Vereinfachungen mit x - y - z -Koordinatensystem im Flächenschwerpunkt (FSP)

(vgl. Kap. 8 zur Berücksichtigung von Stabilitätseffekten). Die Wandstärke der Bleche auf der Ober- und Unterseite wird daher als gestrichene Größe gekennzeichnet. Darüber hinaus idealisieren wir eine Verrippung des Flügels nicht. Wir gehen allerdings davon aus, dass der Profilquerschnitt bei Belastung erhalten bleibt. Aufgrund der Dünnwandigkeit der Struktur werden wir leichtbautypische Vereinfachungen bei der Berechnung nutzen (vgl. hierzu Abschnitt 3.5).

Zunächst werden wir Querschnittsgrößen (Flächenschwerpunkt, Schubmittelpunkt, Flächenträgheitsmomente) ermitteln, da wir diese Größen u. a. benötigen, um das resultierende Torsionsmoment bestimmen zu können. Darauf aufbauend berechnen wir die Schnittreaktionen, die wir zur Ermittlung der einzelnen Grundbeanspruchungen verwenden werden. Abschließend superponieren wir die Grundbeanspruchungen zu überlagerten Spannungszuständen.

6.2.1 Flächenschwerpunkt und Flächenträgheitsmomente

Um entkoppelte Beziehungen zwischen den Biegemomenten und der Normalkraft zu erhalten (vgl. zu entkoppelten Gleichungen Abschnitt 3.2), legen wir unser Koordinatensystem in den Flächenschwerpunkt. Wenn wir dann die y -Achse in der Symmetrielinie des Profils positionieren, findet die Biegung um die Hauptachsen statt. Das Deviationsmoment ist somit null. Aus diesem Grunde werden wir zunächst den Flächenschwerpunkt ermitteln, um darauf aufbauend die Hauptträgheitsmomente angeben zu können.

Da das Profil symmetrisch zur \bar{y} -Achse ist, ist die \bar{z}_s -Koordinate null, d. h. der Flächenschwerpunkt befindet sich in der Symmetrielinie. Die \bar{y}_s -Koordinate berechnen wir, indem wir mehrere Teilflächen unter Beachtung leichtbautypischer Vereinfachungen unterscheiden. Anzumerken ist, dass wir die Flächen A_2 und A_3 aufgrund der Symmetrie jeweils doppelt berücksichtigen (vgl. Abb. 6.2b)). Dadurch müssen wir die Ober- und Unterseite nicht einzeln auführen. Die resultierenden Querschnittsgrößen zur Berechnung des Flächenschwerpunkts sind systematisch in Tab. 6.1 zusammengestellt. Es resultiert

Tab. 6.1 Querschnittsgrößen zur Bestimmung des Flächenschwerpunkts (FSP) im \bar{y} - \bar{z} -Koordinatensystem nach Abb. 6.2b); der Index si kennzeichnet Größen in Bezug zum Flächenschwerpunkt der Teilfläche i

i	1	2	3	4
\bar{y}_{si}	b_2	$b_2 - \frac{c}{2}$	$\frac{b_2 - c}{2}$	0
A_i	$h t_1$	$2 c t_2$	$2 (b_2 - c) \bar{t}_3$	$h t_4$
$\bar{y}_{si} A_i$	$b_2 h t_1$	$c t_2 (2 b_2 - c)$	$\frac{\bar{t}_3}{2} (b_2 - c)^2$	0

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_i \bar{y}_{si} A_i}{\sum_i A_i} = \frac{2,6836 \cdot 10^5 \text{ mm}^3}{766 \text{ mm}^2} = 350,34 \text{ mm} .$$

Die Lage des Flächenschwerpunkts ist damit bekannt. Das x - y - z -Koordinatensystem im Flächenschwerpunkt erhalten wir durch Parallelverschiebung des gestrichenen Koordinatensystems, d. h. es gilt

$$x = \bar{x} , \quad y = \bar{y} - \bar{y}_s , \quad z = \bar{z} .$$

Das y - z -Hauptachsensystem ist somit gefunden.

Wir ermitteln nun die Flächenträgheitsmomente. Hierzu nutzen wir Tab. 6.2, in der alle relevanten Größen aufgeführt sind. Wenn wir jeweils die Eigen- und Steiner-Anteile summieren, erhalten wir die Hauptträgheitsmomente zu

$$I_y = \sum_i I_{y_{si}} + \sum_i z_{si}^2 A_i = 4,3152 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 ,$$

$$I_z = \sum_i I_{z_{si}} + \sum_i y_{si}^2 A_i = 4,6383 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 .$$

Tab. 6.2 Querschnittsgrößen zur Bestimmung der Flächenträgheitsmomente I_y und I_z ; der Index si kennzeichnet Größen in Bezug zum Flächenschwerpunkt der Teilfläche i

i	1	2	3	4
y_{si}	$b_2 - \bar{y}_s$	$b_2 - \bar{y}_s - \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}b_4 - \bar{y}_s$	$-\bar{y}_s$
z_{si}	0	$\pm \frac{1}{2}h$	$\pm \frac{1}{2}h$	0
A_i	$h t_1$	$2 c t_2$	$2 b_4 \bar{t}_3$	$h t_4$
$I_{y_{si}}$	$\frac{1}{12} h^3 t_1$	≈ 0	≈ 0	$\frac{1}{12} h^3 t_4$
$I_{z_{si}}$	≈ 0	$\frac{1}{6} c^3 t_2$	$\frac{1}{6} b_4^3 \bar{t}_3$	≈ 0
$y_{si}^2 A_i$	$(b_2 - \bar{y}_s)^2 h t_1$	$2 c t_2 (b_2 - \bar{y}_s - \frac{c}{2})^2$	$2 b_4 \bar{t}_3 (\frac{1}{2} b_4 - \bar{y}_s)^2$	$\bar{y}_s^2 h t_4$
$z_{si}^2 A_i$	0	$\frac{1}{2} h^2 c t_2$	$\frac{1}{2} h^2 b_4 \bar{t}_3$	0

6.2.2 Schubmittelpunkt des offenen Profils

Zur Ermittlung des Schubmittelpunkts schneiden wir das Profil in der rechten unteren Ecke nach Abb. 6.3a) auf, wodurch wir eine freie Oberfläche erhalten, an der die Schubspannung bzw. der Schubfluss verschwindet. Wir wählen die lokalen Umfangskoordinaten s_i entlang der Profilmittellinie gemäß Abb. 6.3a). Da wir den Schubmittelpunkt über einen variablen Schubfluss q' im Querschnitt berechnen müssen, nutzen wir die Kusinenformel (vgl. die Gln. (5.21) und (5.45)). Aufgrund der Symmetrie des Trägers wird der Schubmittelpunkt auf der y -Achse liegen. Wir ermitteln daher lediglich den Schubfluss infolge der Querkraft Q_z

$$q'_i = -\frac{Q_z}{I_y} S_y .$$

Das Minuszeichen wählen wir, da wir die mit der lokalen Umfangskoordinate überstrichene Fläche zur Bestimmung des Statischen Moments S_y verwenden. Wir erhalten einen Schubfluss q'_i , der in Richtung der gewählten Umfangskoordinate weist, wenn sein Vorzeichen positiv ist. Für die Schubflüsse folgt

$$q'_1(s_1) = -\frac{t_1 s_1 Q_z}{2 I_y} (h - s_1) \quad \text{mit} \quad 0 \leq s_1 \leq h, \quad (6.1)$$

$$q'_2(s_2) = \frac{t_2 s_2 h Q_z}{2 I_y} \quad \text{mit} \quad 0 \leq s_2 \leq c, \quad (6.2)$$

$$q'_3(s_3) = \frac{h Q_z}{2 I_y} (\bar{t}_3 s_3 + t_2 c) \quad \text{mit} \quad 0 \leq s_3 \leq b_4, \quad (6.3)$$

$$q'_4(s_4) = \frac{Q_z}{2 I_y} [t_4 s_4 (h - s_4) + \bar{t}_3 b_4 h + t_2 c h] \quad \text{mit} \quad 0 \leq s_4 \leq h, \quad (6.4)$$

$$q'_5(s_5) = \frac{Q_z}{2 I_y} [(b_4 - s_5) \bar{t}_3 h + t_2 c h] \quad \text{mit} \quad 0 \leq s_5 \leq b_4, \quad (6.5)$$

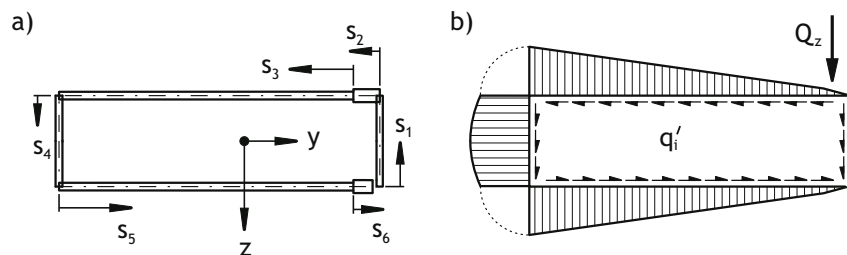


Abb. 6.3 a) Geöffnetes Profil und gewählte Umfangskoordinaten, b) qualitativer Schubflussverlauf infolge der Querkraft $Q_z > 0$

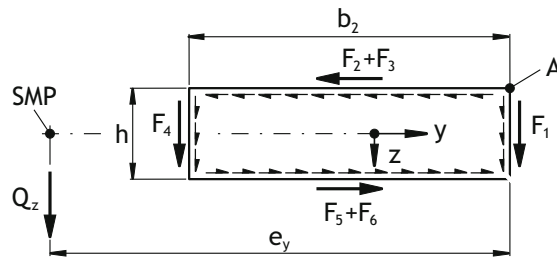


Abb. 6.4 Verhältnisse zur Berechnung der Schubmittelpunktslage (SMP)

$$q'_6(s_6) = \frac{t_2 h Q_z}{2 I_y} (c - s_6) \quad \text{mit} \quad 0 \leq s_6 \leq c. \quad (6.6)$$

Der resultierende Schubflussverlauf ist qualitativ in Abb. 6.3b) dargestellt. Der Schubfluss ist als Betrag gekennzeichnet und seine tatsächliche Richtung für $Q_z > 0$ durch die Pfeile angegeben.

Mit den bekannten variablen Schubflüssen können wir den Schubmittelpunkt des geöffneten Profils ermitteln. Dazu positionieren wir die Querkraft Q_z im Schubmittelpunkt und formulieren die Momentengleichheit zwischen den Schubflüssen q'_i und der Querkraft Q_z um den Punkt A nach Abb. 6.4. Um den Punkt A produzieren nur die Schubflüsse in den Bereichen 4, 5 und 6 Momente. Die aufsummierten Schubflüsse ergeben in diesen Bereichen wegen $F_i = \int q'_i ds_i$ die Kräfte

$$F_4 = 0,9479 Q_z, \quad F_5 = 1,9180 Q_z, \quad F_6 = 0,0038 Q_z.$$

Die Momentengleichheit um Punkt A liefert

$$Q_z e_y = F_4 b_2 + (F_5 + F_6) h \Leftrightarrow e_y = 961,70 \text{ mm},$$

wodurch der Schubmittelpunkt auf der Symmetrielinie festliegt (vgl. Abb. 6.4).

6.2.3 Schnittreaktionen

Der Flügel ist statisch bestimmt gelagert (vgl. Abb. 6.1), so dass wir mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die unbekanntes Lagerkräfte sowie Schnittreaktionen ermitteln können. Da der Flügel als ein über den Stab EF abgestützter Kragarm aufgefasst werden kann, müssen wir nur die Stabkraft als unbekanntes äußere Lagerkraft ermitteln. Wir nutzen den Freischnitt der Stabkraft S nach Abb. 6.1 und berechnen das Momentengleichgewicht um die \bar{y} -Achse. Wir erhalten mit $q_L = 1,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$

$$\sum_i M_{i\bar{y}} = 0 \Leftrightarrow S \cos \alpha l_1 - q_L \frac{l^2}{2} = 0 \Leftrightarrow S = \frac{l^2 q_L}{2 l_1 \cos \alpha} \approx 12,935 \text{ kN}.$$

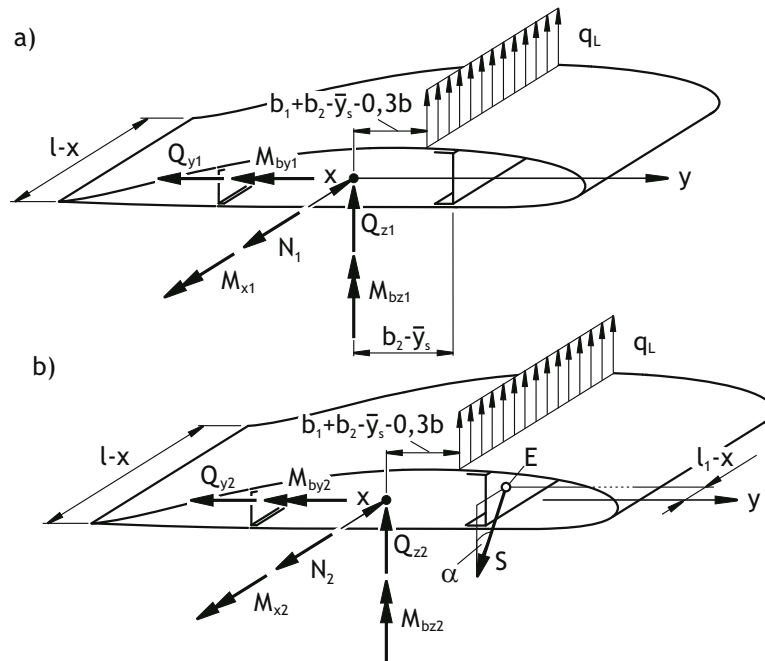


Abb. 6.5 Negative Schnittufer am Flügel mit resultierenden Schnittreaktionen im a) Außenflügelbereich und b) zwischen Rumpfanbindung und Flügelstütze

Unter Beachtung des berechneten Flächenschwerpunkts liefern die Gleichgewichtsbeziehungen im Bereich 1 mit $l_1 \leq x \leq l$ am negativen Schnittufer nach Abb. 6.5a)

$$N_1, Q_{y1}, M_{bz1} = 0, \quad Q_{z1} = -q_L (l - x), \quad M_{by1} = \frac{q_L}{2} (l - x)^2 \quad \text{und} \\ M_{x1} = -q_L (l - x) (b_1 + b_2 - \bar{y}_s - 0,3b) .$$

Die Schnittreaktion M_{x1} stellt nicht die Torsionsbeanspruchung dar. Vielmehr müssen wir diesem Moment noch das Moment $M_{Q_{z1}}$ überlagern, das aus der Querkraft Q_z resultiert, da diese nach unserer Definition im Flächenschwerpunkt, aber nicht im Schubmittelpunkt angreift. Unter Beachtung von Abb. 6.6 können wir schreiben

$$T_1 = M_{x1} + M_{Q_{z1}} = M_{x1} + Q_{z1} (e_y - b_2 + \bar{y}_s) .$$

Im Bereich 2 mit $0 \leq x \leq l_1$ ergeben sich veränderte Verhältnisse infolge der Lasteinleitung über die Stütze (vgl. Abb. 6.5b)). Wir erhalten dann

$$N_2 = -S \sin \alpha, \quad Q_{y2} = 0, \quad Q_{z2} = S \cos \alpha - q_L (l - x), \\ M_{bz2} = (b_2 - \bar{y}_s) S \sin \alpha, \quad M_{by2} = \frac{q_L}{2} (l - x)^2 - S \cos \alpha (l_1 - x), \\ M_{x2} = S \cos \alpha (b_2 - \bar{y}_s) - q_L (l - x) (b_1 + b_2 - \bar{y}_s - 0,3b)$$

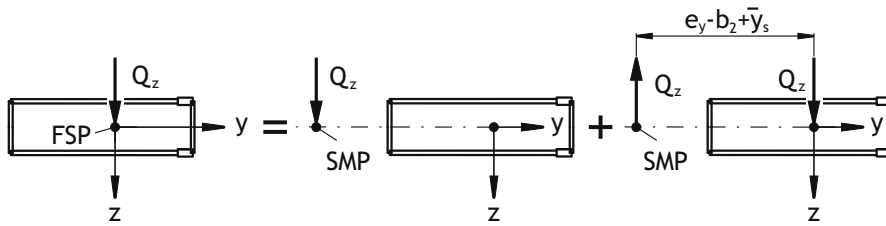


Abb. 6.6 Verhältnisse am positiven Schnittufer zur Bestimmung der Torsionsbeanspruchung an der tragenden Flügelstruktur mit Flächenschwerpunkt FSP und Schubmittelpunkt SMP

und damit für das Torsionsmoment

$$T_2 = M_{x2} + M_{Q_{z2}} = M_{x2} + Q_{z2} (e_y - b_z + \bar{y}_s) .$$

Die Auswertung der Schnittreaktion führt auf die in Abb. 6.7 dargestellten Verläufe. Der am höchsten belastete Querschnitt befindet sich im Bereich 2, wo die Stütz-

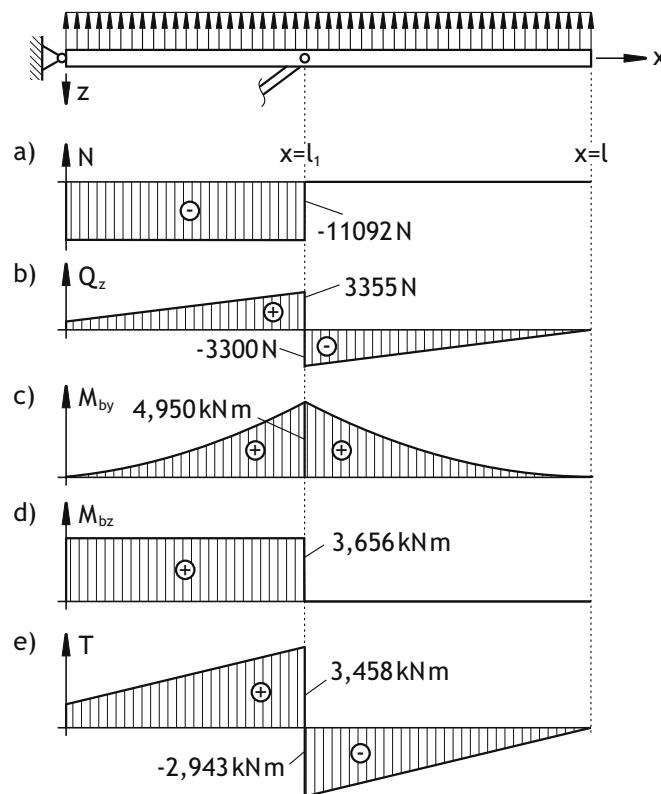


Abb. 6.7 Qualitative Verläufe der Schnittreaktionen: a) Normalkraft N , b) Querkraft Q_z , c) Biegemoment M_{by} , d) Biegemoment M_{bz} und e) Torsionsmoment T

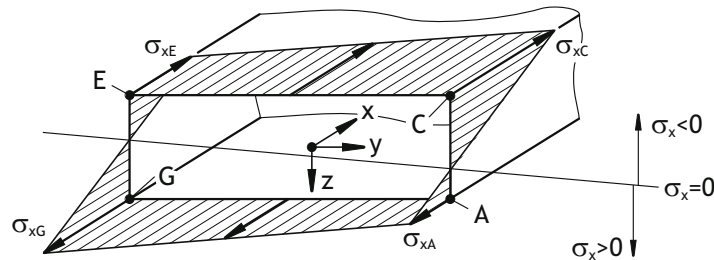


Abb. 6.8 Normalspannungen in der Tragstruktur bei $x = l_1$ zwischen Flügelstütze und Rumpfanbindung sowie Spannungsnulllinie $\sigma_x = 0$

kraft S in den Tragflügel eingeleitet wird. Wir untersuchen daher diesen Querschnitt hinsichtlich der auftretenden Spannungen.

6.2.4 Normalspannungsbeanspruchung

Auf der Basis der zuvor ermittelten Schnittreaktionen lassen sich die Normalspannungen im Träger bestimmen. Wir untersuchen beispielhaft den Flügelquerschnitt, in dem die Stützkraft in den Flügel eingeleitet wird, da hier die maximalen Normalspannungen auftreten. Dies ist zugleich auch der Bereich, in dem zuerst Versagen auftreten wird. Mit Gl. (3.24) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma_x(x = l_1, y, z) &= \frac{N_2(l_1)}{A} - \frac{M_{bz2}(l_1)}{I_z} y + \frac{M_{by2}(l_1)}{I_y} z \\ &= -14,48 \text{ MPa} + \left[1,1471 z - 0,0788 y \right] \frac{\text{MPa}}{\text{mm}}.\end{aligned}$$

Wir werten diese Gleichung systematisch für die Eckpunkte des Profils aus. Es folgt der in Abb. 6.8 skizzierte Normalspannungsverlauf. Die Spannungsnulllinie ist ebenfalls mit $\sigma_x = 0$ gekennzeichnet. Die Spannungen in den Ecken lauten

$$\begin{aligned}\sigma_{xA} &= 54,17 \text{ MPa}, & \sigma_{xC} &= -135,10 \text{ MPa}, \\ \sigma_{xE} &= -81,50 \text{ MPa} & \text{und} & \sigma_{xG} &= 107,78 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Da die Normalspannungen im Querschnitt linear variieren, tritt die maximale Normalspannung in der Ecke C mit $|\sigma_{x_{\max}}| = |\sigma_{xC}| = 135,10 \text{ MPa}$ auf.

6.2.5 Schubspannungsbeanspruchung

Die Schubspannungen im Profilquerschnitt entstehen aus der anliegenden Querkraft- sowie der Torsionsbelastung. Die Torsion resultiert aus der Tatsache, dass die

angreifende Querkraft infolge der Luftlasten nicht notwendigerweise im Schubmittelpunkt des Profils angreift. Während des Fluges wandert ihr Kraftangriffspunkt und somit auch die Torsionsbelastung. Aus Auslegungsgründen ist die Lage der Luftkraft in unserem Berechnungsfall festgelegt und schwankt daher nicht (vgl. die Abb. 6.5a) und b)). Die Torsionsbeanspruchung des Profils kennen wir bereits gemäß Unterabschnitt 6.2.3. Wir ermitteln hier den Schubflussverlauf für die am höchsten belastete Stelle bei $x = l_1$.

Der Schubflussverlauf kann bei einem geschlossenen einzelligen Querschnitt in einen veränderlichen und einen konstanten Anteil q'_i bzw. q_0 unterschieden werden

$$q_i = q'_i + q_0 .$$

Der variable Anteil steht uns bereits durch die Ermittlung der Schubmittelpunktlage nach den Gln. (6.1) bis (6.6) in Abhängigkeit von Q_z zur Verfügung. Da keine Querkraft Q_y wirkt, beschreiben diese Gleichungen auch die Schubflüsse q'_i (vgl. qualitativer Verlauf nach Abb. 6.3b)). Wir müssen lediglich die Querkraft an der Stelle $x = l_1$ mit $Q_{z2}(x = l_1)$ berücksichtigen.

Den konstanten Schubflussanteil ermitteln wir unter Nutzung der 1. Bredtschen Formel (vgl. die Gln. (4.18) und (4.19)) aus dem anliegenden Torsionsmoment T . Der konstant im Profil umlaufende Schubfluss q_0 folgt mit der von der Profilmittel-

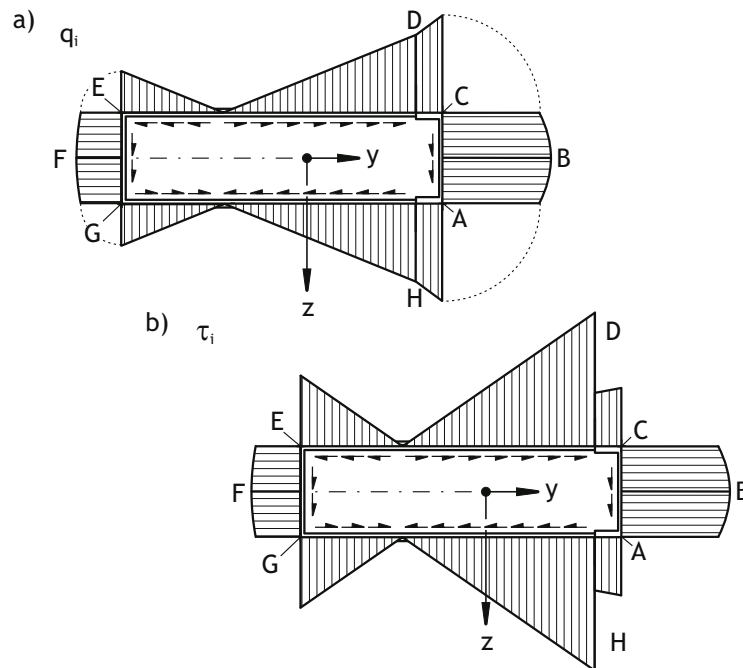


Abb. 6.9 Qualitativer Verlauf der resultierenden a) Schubflüsse q_i und b) Schubspannungen τ_i

Tab. 6.3 Schubflüsse und maximale Schubspannungen an einzelnen Profilpunkten sowie ihre jeweilige Wirkungsrichtung nach den Abbn. 6.9a) und b)

	A	B	C	D	E	F	G	H
$q_i \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$	15,41	17,00	15,41	14,12	2,81	4,40	2,81	14,12
$\tau_{\max} \text{ [MPa]}$	25,68	28,33	25,68	35,31	7,02	7,33	7,02	35,31

linie umschlossenen Fläche A_m zu

$$q_0 = \frac{T_2(x = l_1)}{2 A_m} = \frac{T_2(x = l_1)}{2 h b_2} = 15,41 \frac{\text{N}}{\text{mm}} .$$

Das positive Vorzeichen kennzeichnet, dass dieser Schubfluss entlang der Profilmittellinie ein Moment mit positiver Wirkungsrichtung um die x -Achse erzeugt.

Damit kann der resultierende Schubfluss q_i aus den Anteilen q_i' und q_0 überlagert bzw. superponiert werden. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir diese Ergebnisse qualitativ in den Abbn. 6.9a) und b) dar. Für die dort gekennzeichneten Punkte A bis H sind in Tab. 6.3 sowohl die Schubflüsse als auch die Schubspannungen angegeben. Bzgl. der Schubspannungen ist zu beachten, dass für den jeweiligen Punkt immer die maximale Schubspannung τ_{\max} aufgeführt ist, die sich für die untersuchte Stelle infolge der kleineren Wandstärke ergibt.

6.2.6 Überlagerter Spannungszustand

Die Beanspruchung im Flügel setzt sich aus allen auf der Struktur wirkenden Lasten zusammen. Die aus den einzelnen Lasten folgenden Beanspruchungen haben wir exemplarisch in den vorherigen Unterabschnitten bestimmt. Hier werden wir diese einzelnen Beanspruchungen nun mit Hilfe des Superpositionsprinzips zu einer Gesamtbeanspruchung zusammenfassen.

Als Ergebnis der vorherigen Untersuchungen liegt eine Normalspannungs- sowie eine Schubspannungsbeanspruchung vor. Diese betrachten wir für ein infinitesimales Wanelement, das wir nach Abb. 6.10a) aus dem dünnwandigen Träger gedanklich ausschneiden. Dabei spielt es keine Rolle, ob das Element in den Seitenwänden oder in der Unter- oder Oberseite analysiert wird.

Wir erhalten ein Wanelement mit einer reinen Schubbeanspruchung τ gemäß Abb. 6.10a) und einer einzig wirkenden Normalspannung σ_x , wie sie in Abb. 6.10b) skizziert ist. Da wir lineares Strukturverhalten annehmen, beeinflussen sich die beiden Beanspruchungen nicht gegenseitig. Wir dürfen daher die beiden Spannungszustände addieren. Der in Abb. 6.10c) dargestellte Spannungszustand beschreibt demnach die Beanspruchung infolge aller anliegenden Belastungen.

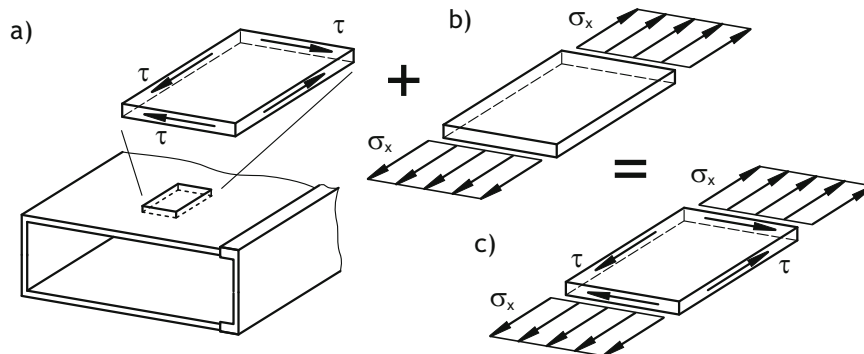


Abb. 6.10 a) Infinitesimales Wanelement und reine Schubbeanspruchung, b) reine Normalspannungsbeanspruchung, c) kombinierte Beanspruchung aus Schub- und Normalspannung

6.3 Festigkeitshypothesen

Strukturbauteile sind gewöhnlich komplexen Spannungszuständen unterworfen, die ab einer bestimmten Grenze zu einem Versagen des eingesetzten Werkstoffs führen. Die Vorhersage sicherer Betriebsgrenzen bei kombinierter Beanspruchung erfordert, dass die im Bauteil auftretenden Spannungszustände, d. h. Kombinationen aus Normal- und Schubspannungen, hinsichtlich plastischem Fließen oder Bruch bewertet werden. Alternativ kann statt dem Spannungs- auch der Verzerrungszustand zur Vorhersage der Tragfähigkeit herangezogen werden. Wir beschränken uns hier jedoch der Anschaulichkeit halber auf die Beurteilung von Spannungszuständen.

Dem Versagensverhalten werden wir uns hier phänomenologisch nähern, d. h. wir verdeutlichen das Materialverhalten anhand experimentell gewonnener Erkenntnisse. Hierzu betrachten wir drei unterschiedliche Spannungszustände nach den Abb. 6.11 a) bis c). Es möge sich um ein duktilen Material handeln, das wir mit ideal elastoplastischem Verhalten beschreiben können. Dies bedeutet, dass sich einem linear-elastischen Bereich in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ein plastischer Bereich mit konstanter Spannung anschließt, die wir hier mit der Fließspannung σ_F gleichsetzen. Exemplarisch ist dieser Verlauf in Abb. 6.11 a) für einen einachsigen Zugstab dargestellt. Wir können den Elastizitätsmodul E ablesen, der die Steigung der Kurve im linearen Bereich darstellt. Außerdem beginnt das Fließen des Materials, wenn die Spannung σ_x die Fließgrenze erreicht.

Wir nehmen weiter an, dass der einachsige Spannungszustand des Zugstabes aus dem vorherigen Beispiel jetzt mit einem Querdruck σ_y überlagert wird, der betragsmäßig so groß ist wie die Zugspannung σ_x , d. h. es gilt $\sigma_y = -\sigma_x$. Experimentell können wir diesen Zustand in einem dünnwandigen Kreisringstab, der durch ein Torsionsmoment belastet ist, unter 45° zur Stabachse finden. Wir erhalten dann eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung gemäß Abb. 6.11 b). Wir beobachten jetzt, dass

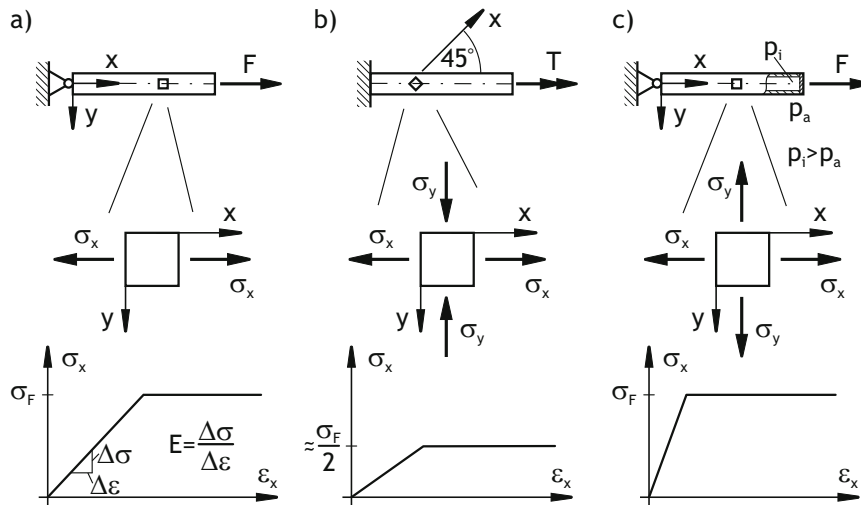


Abb. 6.11 a) Einachsiger Spannungszustand infolge von Zug, b) zweiachsiger Spannungszustand infolge von Zug sowie Querdruck, c) zweiachsiger Spannungszustand bei Zug in 2 Richtungen

das Material bereits bei einer Spannung σ_x zu fließen beginnt, die ca. 50 % niedriger ist als beim einachsigen Zugversuch.

Betrachten wir das dritte Beispiel in Abb. 6.11c). In diesem Fall liegt statt einer Querdruck- eine Querspannung σ_y vor, die betragsmäßig so groß ist wie die Zugbelastung σ_x . Experimentell ließe sich dieser Spannungszustand bei einem dünnwandigen Kreisringstab unter Innendruck p_i bei gleichzeitiger Zugbelastung realisieren. Wir beobachten jetzt, dass die Fließgrenze im Vergleich zum reinen Zugstab bei praktisch unveränderter Zugspannung σ_x auftritt.

Wir erkennen an diesen Beispielen, dass verschiedene Spannungszustände zu sehr unterschiedlichem Versagensverhalten führen können. Da die Gestaltung von Bauteilen nicht eingeschränkt sein sollte bzw. grundsätzlich beliebig ist, müssen somit auch beliebige Spannungszustände hinsichtlich Versagen bewertet werden. Dies ist aber experimentell praktisch nicht umsetzbar. Wir müssen vielmehr einen allgemeinen Zusammenhang zwischen einem potentiell beliebigen Spannungszustand und dem beobachtbaren Versagen herstellen. Dies erfolgt i. Allg. durch die Anwendung von sogenannten *Festigkeits-hypothesen* bzw. *Festigkeitskriterien*, bei denen der vorliegende Spannungszustand zu einer einzigen Spannung, der sogenannten *Vergleichsspannung* σ_V , zusammengefasst wird. Bei isotropem Material kann eine funktionale Abhängigkeit der Vergleichsspannung von den Hauptspannungen des räumlichen Spannungszustands σ_1 , σ_2 und σ_3 wie folgt formuliert werden

$$\sigma_V = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (6.7)$$

Als Folge ist ein dreidimensionaler Spannungszustand auf eine einzige Spannung zurückgeführt und kann somit mit einer einfachen einachsigen Versuchsanordnung wie einem Zugversuch verglichen werden. Die Tragfähigkeit gilt dann als nicht überschritten, solange die Vergleichsspannung σ_V unter einer *zulässigen Spannung* σ_{zul} bleibt, die das Versagen in Form einer Fließ- oder Bruchgrenze beschreibt,

$$\sigma_V \leq \sigma_{zul} . \quad (6.8)$$

Es müssen daher nicht mehr beliebig viele experimentelle Tests durchgeführt werden, sondern nur noch eine sehr limitierte Anzahl. Gleichzeitig kann mit dieser Beschreibung festgestellt werden, wie weit der vorliegende Spannungszustand noch erhöht werden kann, bis Versagen auftritt. Beziehen wir die zulässige Spannung auf die Vergleichsspannung, so erhalten wir die *Sicherheit*

$$S = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_V} , \quad (6.9)$$

die angibt, um welchen Faktor wir die Belastung noch erhöhen können, ohne dass Versagen auftritt.

Wir werden nachfolgend zunächst ausführlich die Transformation von räumlichen Spannungszuständen diskutieren. Dies geschieht vor dem Hintergrund, dass zum einen die Vergleichsspannung σ_V bei dreidimensionalen Festigkeitshypothesen ebenfalls die Hauptspannung σ_3 in die dritte Koordinatenrichtung berücksichtigt, wir aber bisher nur ebene Spannungstransformationen betrachtet haben (vgl. Unterabschnitt 2.4.3). Zum anderen lassen sich die hier behandelten Festigkeitshypothesen (Normalspannungs-, Schubspannungs- sowie Gestaltänderungsenergiehypothese) leichter verstehen, wenn wir vom dreidimensionalen Hauptspannungszustand ausgehen, den wir aus der Transformation eines beliebigen dreidimensionalen Spannungszustandes ermitteln können. Basierend auf dem dreidimensionalen Hauptspannungszustand werden wir dann Festigkeitshypothesen für isotrope Werkstoffe diskutieren.

6.3.1 Räumliche Spannungstransformation

Als Ausgangspunkt unserer Überlegungen rufen wir uns den Spannungstensor σ aus Unterabschnitt 2.4.1 in Erinnerung. Dieser Tensor legt den Zusammenhang zwischen dem an einem beliebigen infinitesimalen Flächenelement angreifenden Spannungsvektor t und dem Normalenvektor n vollständig fest

$$t = \sigma n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} . \quad (6.10)$$

Hauptspannungen treten in denjenigen Flächenelementen auf, in denen die Schubspannungskomponenten des zugehörigen Spannungsvektors verschwinden. Dies ist aber damit gleichbedeutend, dass der Spannungsvektor in Richtung des Normalenvektors des Flächenelementes zeigt. Wir können demnach die vorherige Gleichung für eine unbekannte Hauptspannung σ_i , die in Richtung des Normalenvektors \mathbf{n}_i auftritt, umformulieren zu

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_i = \sigma_i \mathbf{n}_i . \quad (6.11)$$

Bei Gl. (6.11) handelt es sich um ein Eigenwertproblem, das wir auch mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} wie folgt angeben können

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_i \mathbf{E}) \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (6.12)$$

Da der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ symmetrisch ist, existieren drei reelle Werte bzw. Hauptspannungen σ_i , die das Gleichungssystem lösen und die als Eigenwerte des Eigenwertproblems bezeichnet werden. Die zu den Hauptspannungen σ_i gehörenden Normalenvektoren \mathbf{n}_i sind ebenfalls reellwertig. Sie stellen Eigenvektoren des Eigenwertproblems dar. Sie stehen senkrecht aufeinander und definieren die Hauptspannungsrichtungen, d. h. sie spannen das Hauptachsensystem auf.

Das Gleichungssystem (6.12) besitzt nur dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante des Systems verschwindet

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0 . \quad (6.13)$$

Daraus erhalten wir die folgende kubische Gleichung

$$\sigma_i^3 - I_{\sigma_1} \sigma_i^2 + I_{\sigma_2} \sigma_i - I_{\sigma_3} = 0 , \quad (6.14)$$

deren Koeffizienten I_{σ_1} , I_{σ_2} und I_{σ_3} wir als *Invarianten des Spannungstensors* bezeichnen. Diese nennen wir so, weil sie nicht vom gewählten Koordinatensystem abhängen, sie also invariant sind. Für diese Größen resultiert

$$I_{\sigma_1} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z , \quad (6.15)$$

$$I_{\sigma_2} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 , \quad (6.16)$$

$$I_{\sigma_3} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 . \quad (6.17)$$

Die kubische Gl. (6.14) kann entweder numerisch oder mit Hilfe der cardanischen Formeln, die nach Gerolamo Cardano (1501-1576, italienischer Mathematiker) benannt sind, gelöst werden (vgl. zu cardanischen Formeln z. B. [2]). Ihre Lösung ergibt die Hauptspannungen σ_1 , σ_2 und σ_3 , die wir unter Beachtung von

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ zuordnen. Für das resultierende Hauptachsensystem reduziert sich dann der Spannungstensor zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Dieser und der ursprüngliche Spannungstensor nach Gl. (6.12) repräsentieren denselben Spannungszustand. Lediglich die Bezugsachsen bzw. die Schnittflächen sind gedreht. Neben den Hauptspannungen können wir ebenfalls die Hauptspannungsrichtung aus dem Gleichungssystem (6.12) ermitteln. Da für die nachfolgenden Ableitungen allerdings die Normalenvektoren \mathbf{n}_i nicht erforderlich sind, stellen wir deren Bestimmung hier nicht dar.

Beispiel 6.1 Der Hauptspannungszustand soll für einen gegebenen räumlichen Spannungszustand bestimmt werden.

Gegeben Spannungen $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 110 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 50 \text{ MPa}$,
 $\tau_{xy} = 20 \text{ MPa}$, $\tau_{xz} = 20 \text{ MPa}$ und $\tau_{yz} = 20 \text{ MPa}$

Gesucht Berechnen Sie die Hauptspannungen des gegebenen Spannungszustandes, indem Sie für den korrespondierenden Spannungstensor ein Eigenwertproblem lösen.

Lösung Für den Spannungstensor erhalten wir

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 80 \\ 20 & 110 & 20 \\ 80 & 20 & 50 \end{bmatrix} \text{ MPa}. \quad (6.19)$$

Für die Invarianten gemäß den Gln. (6.15) bis (6.17) resultiert

$$I_{\sigma_1} = 210 \text{ MPa}, \quad I_{\sigma_2} = 6300 \text{ MPa}^2, \quad I_{\sigma_3} = -405000 \text{ MPa}^3. \quad (6.20)$$

Die zu lösende kubische Gleichung lautet dann

$$\sigma_i^3 - \sigma_i^2 \cdot 210 \text{ MPa} + \sigma_i \cdot 6300 \text{ MPa}^2 + 405000 \text{ MPa}^3 = 0. \quad (6.21)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt die gesuchten Hauptspannungen

$$\sigma_1 = 150 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 90 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -30 \text{ MPa}. \quad (6.22)$$

Ausgehend vom Hauptspannungszustand nach Gl. (6.18) werden wir die Transformationsbeziehungen des räumlichen Spannungszustand mit Hilfe des *Mohrschen Spannungskreises* veranschaulichen, der nach Christian Otto MOHR (1835-1918, deutscher Bauingenieur) benannt ist. Dieses Vorgehen ist wesentlich anschaulicher,

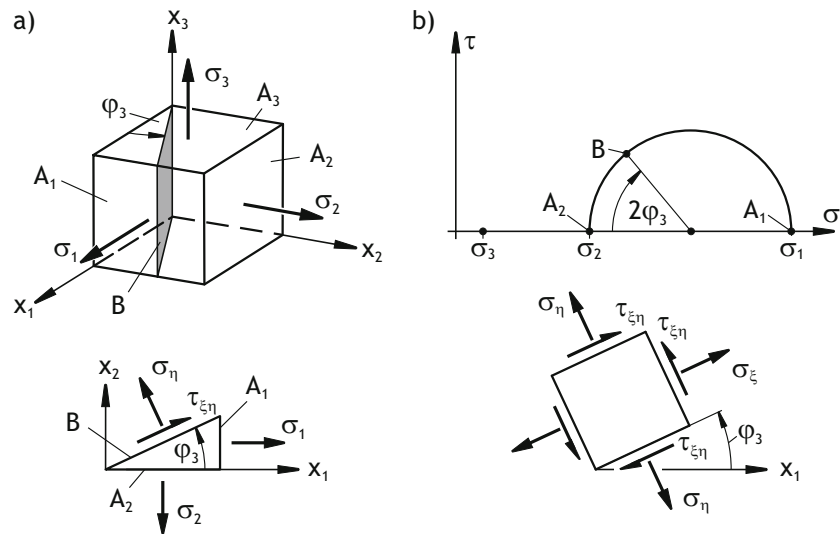


Abb. 6.12 a) Schnittflächen am infinitesimalen Element, b) Mohrscher Spannungskreis bei gedrehter Schnittfläche in x_1 - x_2 -Ebene

als die zugrunde liegenden mathematischen Zusammenhänge zu untersuchen, da wir nur die Gleichgewichtsbeziehungen für geeignet gewählte Schnittelemente benötigen. Zur Wiederholung des Mohrschen Spannungskreises sei an dieser Stelle auf [4, S. 56 ff.] verwiesen.

Wir bestimmen die Spannungen in Schnittelementen ausgehend vom Hauptspannungszustand. Dabei drehen wir das Schnittelement zunächst in der x_1 - x_2 -Ebene um den Winkel φ_3 nach Abb. 6.12a). Als Folge geht in die Transformationsbeziehungen die Hauptspannung σ_3 nicht ein. Wir erhalten die Zusammenhänge, die auch für den Ebenen Spannungszustand gelten (vgl. die Gln. (2.36) bis (2.38)). Somit ist auch der Mohrsche Spannungskreis nutzbar. Wir erhalten den in Abb. 6.12b) dargestellten Spannungskreis, den wir in der üblichen Weise konstruieren. Der Einfachheit halber ist er nur für positive Schubspannungen τ skizziert. Die Spannungszustände infolge der Drehung um den Winkel φ_3 befinden sich auf dem Umfang des durch die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 festgelegten Kreises. Die entsprechenden Schnittflächen sind in den Abb. 6.12a) und b) mit A_1 , A_2 und B gekennzeichnet.

Analog können wir Schnittflächen untersuchen, bei denen jeweils eine andere Hauptspannung nicht in die Transformationsbeziehungen eingeht. Die entsprechenden Drehungen in der x_2 - x_3 - und x_1 - x_3 -Ebene sind in den Abb. 6.13a) und b) dargestellt. Die resultierenden Mohrschen Spannungskreise sind zusammen mit der Spannungstransformation in der x_1 - x_2 -Ebene in Abb. 6.14 skizziert. Wir erhalten insgesamt drei Mohrsche Spannungskreise. Spannungen in Schnittelementen, die nicht senkrecht zu einer der Hauptspannungsebenen verlaufen, also beliebig orientiert sind, befinden sich im schraffiert dargestellten Bereich, und zwar wieder auf

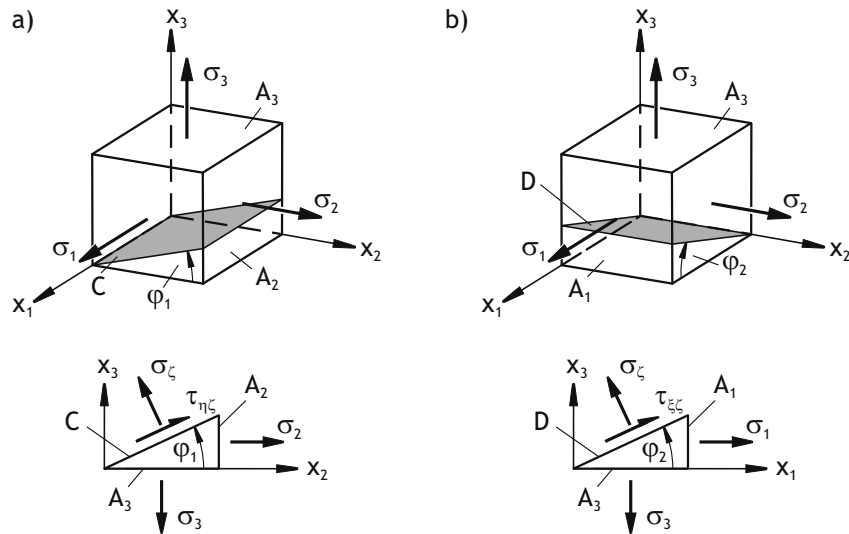


Abb. 6.13 Gedrehte Schnittfläche in a) x_2 - x_3 - und b) x_1 - x_3 -Ebene

Kreisbögen. Der jeweilige Kreismittelpunkt entspricht dabei einem der Mittelpunkte der skizzierten Mohrschen Spannungskreise. Beispielhaft ist hierzu in Abb. 6.14 die Spannungstransformation von der Schnittfläche C in Abb. 6.13a) zur Schnittfläche D in Abb. 6.13b) skizziert. Die transformierten Zustände zwischen den genannten Schnittflächen liegen auf dem Kreisbogen mit dem Radius $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$.

Da zum Verständnis der nachfolgenden Festigkeitshypothesen die Konstruktion der letztgenannten Spannungstransformation unerheblich ist, begründen wir an die-

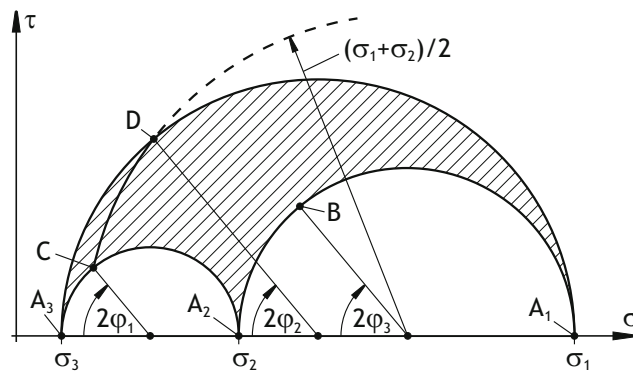


Abb. 6.14 Mohrsche Spannungskreise für räumlichen Spannungszustand

ser Stelle die räumliche Spannungstransformation zwischen zwei Mohrschen Kreisen nicht weiter. Uns steht eine anschauliche Darstellung des räumlichen Spannungszustandes zur Verfügung, so dass wir nun Festigkeitshypothesen behandeln.

6.3.2 Normalspannungshypothese

Bei der *Normalspannungshypothese* gehen wir davon aus, dass die größte Hauptspannung für das Versagen maßgeblich ist. Die Materialbeanspruchung wird daher durch die maximale Hauptspannung beschrieben, die wir mit der Vergleichsspannung gleichsetzen. Für den räumlichen Spannungszustand folgt die Vergleichsspannung zu

$$\sigma_{V,NH} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|) . \quad (6.23)$$

Wegen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ müssen wir die Hauptspannung σ_2 nicht beachten. Um diese Vergleichsspannung von denen anderer Festigkeitskriterien unterscheiden zu können, ist sie mit dem Index *NH* markiert.

Für ebene Spannungszustände ist die Hauptspannung σ_3 null (vgl. hierzu Unterabschnitt 2.4.2), weshalb wir

$$\sigma_{V,NH} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \quad (6.24)$$

erhalten. Da dies ein brauchbares Festigkeitskriterium für spröde Werkstoffe ist, die unter der Bruchlast versagen, setzen wir die Vergleichsspannung in Beziehung zur zulässigen Bruchspannung σ_B , die wir unter einachsiger Belastung experimentell ermitteln

$$\sigma_{V,NH} \leq \sigma_B . \quad (6.25)$$

Sehr übersichtlich können wir Festigkeitskriterien für ebene Spannungszustände im σ_1 - σ_2 -Diagramm bzw. in der σ_1 - σ_2 -Hauptspannungsebene darstellen. Bei der

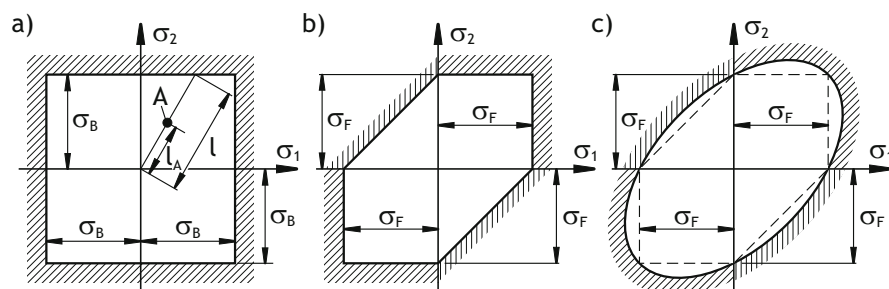


Abb. 6.15 Festigkeitshypothesen für den ebenen Spannungszustand: a) Normalspannungshypothese, b) Schubspannungshypothese, c) Gestaltänderungsenergiehypothese

Normalspannungshypothese wird dann der zulässige Bereich gemäß Abb. 6.15a) begrenzt. Die Sicherheit S eines Zustandes A gegen Bruch stellt das Verhältnis der Längen l zu l_A dar. Anzumerken ist zum einen, dass keine Interaktion der Normalspannungen stattfindet, d. h. dass eine zusätzlich anliegende Querspannung die Bruchgrenze nicht verändert. Zum anderen ist die Normalspannungshypothese anwendbar auf das Bruchverhalten von spröden Werkstoffen unter Zugbeanspruchung.

Beispiel 6.2 Der Spannungszustand in einer dünnen Scheibe ist bekannt. Die Scheibe besteht aus einem spröden Material mit der Bruchfestigkeit σ_B .

Gegeben Spannungszustand in der Scheibe: $\sigma_x = 85 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 125 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 15 \text{ MPa}$; Bruchfestigkeit $\sigma_B = 450 \text{ MPa}$

Gesucht Berechnen Sie die Sicherheit S gegen Bruch.

Lösung Da es sich um einen spröden Werkstoff handelt, können wir die Normalspannungshypothese verwenden. Dazu bestimmen wir zunächst die Hauptspannungen. Wir gehen wegen der Dünnwandigkeit der Scheibe von einem ebenen Spannungszustand aus, bei dem die Spannungen senkrecht zur Scheibenebene vernachlässigbar klein sind. Wir könnten die Beziehungen zur Ermittlung der Hauptspannungen nach Gl. (2.39) nutzen. Alternativ möchten wir hier allerdings das Vorgehen nach Unterabschnitt 6.3.1 anwenden, bei dem die Suche nach den Hauptspannungen als Eigenwertproblem formuliert wird. In diesem Fall haben wir die Determinante des Eigenwertproblems für den ebenen Spannungszustand aufzustellen. Wir erhalten (vgl. Gl. (6.13))

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = \sigma_i^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_i + \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0 .$$

Mittels pq-Formel oder quadratischer Ergänzung resultiert

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 - 2\sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 - 4\tau_{xy}^2} .$$

Dies ist aber die Beziehung gemäß Gl. (2.39), die wir aus den Transformationsbeziehungen für Spannungen nach den Gln. (2.36) bis (2.38) abgeleitet haben. Das Eigenwertproblem ist somit eine äquivalente Formulierung dazu.

Wenn wir die Zahlenwerte berücksichtigen, erhalten wir

$$\sigma_1 = 130 \text{ MPa} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = 80 \text{ MPa} .$$

Demnach ergibt sich die Sicherheit zu

$$S = \frac{\sigma_B}{\sigma_{V,NH}} = \frac{\sigma_B}{\sigma_1} = \frac{450 \text{ MPa}}{130 \text{ MPa}} = 3,46 .$$

Die äußere Belastung kann also noch gleichförmig um den Faktor 3,46 erhöht werden.

6.3.3 Schubspannungshypothese

Bei der *Schubspannungshypothese* wird angenommen, dass das Werkstoffversagen durch die maximale Schubspannung hervorgerufen wird. Diese Hypothese geht auf Henri Edouard Tresca (1814-1885, französischer Ingenieur) zurück, weshalb sie häufig nach ihm benannt wird. Anwendbar ist dieses Kriterium auf duktile Materialien, bei denen das Versagen bei Erreichen der Fließgrenze eintritt.

Zur Verdeutlichung dieses Kriteriums bei seiner Anwendung auf den räumlichen Spannungszustand betrachten wir die Mohrschen Spannungskreise nach Abb. 6.16a). Der Einfachheit halber sind die Kreise nur für positive Schubspannungen dargestellt. Die maximale Schubspannung tritt immer unter einem Winkel von 45° zu den Hauptachsen auf, d. h. im Mohrschen Kreis unter 90° . Die maximale Schubspannung entspricht geometrisch dem Radius des jeweiligen Mohrschen Kreises, der sich aus der Differenz der korrespondierenden Hauptspannungen ergibt. Wenn wir nun jeden einzelnen Mohrschen Kreis hinsichtlich der maximalen Schubspannung untersuchen, so erhalten wir (vgl. Abb. 6.16a))

$$\tau_{12\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \quad (6.26) \quad \tau_{13\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \quad (6.27)$$

sowie

$$\tau_{23\max} = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}. \quad (6.28)$$

Unter diesen Schubspannungen befindet sich die insgesamt größte Schubspannung, die bestimmbar ist über

$$\tau_{\max} = \max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}\right). \quad (6.29)$$

Da wir bei einem einachsigen Zugversuch wegen $\sigma_1 \neq 0$ und $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ die maximale Schubspannung aus

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_V}{2} \quad (6.30)$$

erhalten, resultiert die Vergleichsspannung der Schubspannungshypothese zu

$$\sigma_{V,SH} = 2 \tau_{\max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|). \quad (6.31)$$

Den zusätzlichen Index *SH* der Vergleichsspannung verwenden wir zur Kennzeichnung der Schubspannungshypothese.

Da wir hier in erster Linie dünnwandige Strukturen untersuchen, wenden wir diese Hypothese auf den ebenen Spannungszustand an. Wir erhalten wegen $\sigma_3 = 0$ aus Gl. (6.31)

$$\sigma_{V,SH} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|). \quad (6.32)$$

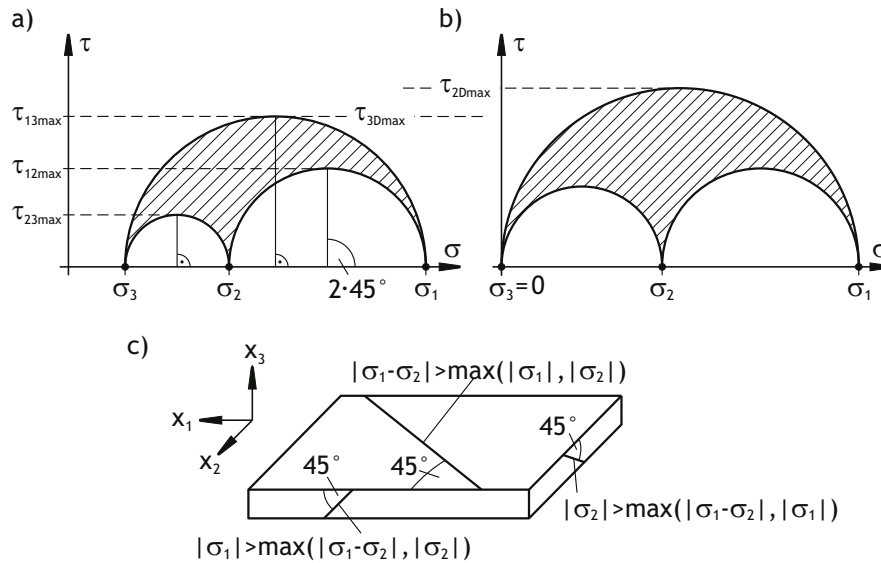


Abb. 6.16 Maximale Schubspannungen beim a) räumlichen und b) ebenen Spannungszustand, c) mögliche Versagensebenen

Grafisch ist dieser Zusammenhang beispielhaft in Abb. 6.16b) dargestellt, der sich aus Abb. 6.16a) wegen $\sigma_3 = 0$ ergibt. Jetzt berühren die Mohrschen Spannungskreise für die Transformationen in der x_1 - x_3 - sowie x_2 - x_3 -Ebene den Koordinatenursprung. Die maximale Schubspannung tritt in der x_1 - x_3 -Ebene auf, da der Radius des Mohrschen Kreises für die Spannungstransformation in der x_1 - x_3 -Ebene am größten geworden ist. Darüber hinaus können wir noch die Versagensebenen ableiten. Versagen tritt immer unter 45° zu den Hauptnormalspannungen auf. Daher existieren 3 potentielle Versagensebenen, die in Abb. 6.16c) skizziert sind. Ergibt sich die größte Schubspannung im Mohrschen Kreis für die σ_1 - σ_3 -Transformation (wie in Abb. 6.16b) dargestellt), so wird auch Versagen in der x_1 - x_3 -Ebene infolge von

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = |\sigma_1| > \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2|) \quad (6.33)$$

auftreten.

Die Schubspannungshypothese ist geeignet zur Vorhersage des Versagens infolge von plastischem Fließen bei duktilen Werkstoffen und bei Druckversagen von spröden Werkstoffen. Wir beschränken uns hier auf duktile Werkstoffe und setzen die Versagensgrenze daher mit der Fließspannung gleich. Es folgt

$$\sigma_{V,SH} \leq \sigma_F \quad (6.34)$$

Wir können die beiden vorherigen Gleichungen in die folgenden Bedingungen überführen

$$\sigma_1 - \sigma_2 \leq \pm \sigma_F, \quad (6.35) \quad \sigma_1 \leq \pm \sigma_F, \quad (6.36) \quad \sigma_2 \leq \pm \sigma_F. \quad (6.37)$$

In Abb. 6.15b) sind diese Zusammenhänge im σ_1 - σ_2 -Diagramm dargestellt.

Beispiel 6.3 Die in Bsp. 6.2 analysierte Scheibe ist hier aus einem duktilen Werkstoff aufgebaut. Das Strukturversagen wird jetzt durch die Fließgrenze σ_F beschrieben.

Gegeben Spannungszustand in der Scheibe: $\sigma_x = 85$ MPa, $\sigma_y = 125$ MPa, $\tau_{xy} = 15$ MPa; Fließspannung $\sigma_F = 330$ MPa

Gesucht Ermitteln Sie die Sicherheit S gegen Versagen.

Lösung Die Hauptspannungen sind bereits in Bsp. 6.2 berechnet. Es gilt

$$\sigma_1 = 130 \text{ MPa} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = 80 \text{ MPa}.$$

Da es sich um einen duktilen Werkstoff handelt, verwenden wir die Schubspannungshypothese. Die Vergleichsspannung erhalten wir aus Gl. (6.32)

$$\sigma_{V,SH} = \max(|180 - 50|, |180|, |50|) \text{ MPa} = 180 \text{ MPa}.$$

Mit der Fließgrenze σ_F erhalten wir demnach die Sicherheit

$$S = \frac{\sigma_F}{\sigma_{V,SH}} = \frac{330 \text{ MPa}}{180 \text{ MPa}} = 1,8.$$

Das Material ist somit noch nicht bis zu seiner Versagensgrenze belastet.

6.3.4 Gestaltänderungsenergiehypothese

Die Versagensgrenzen werden bei den zuvor behandelten Festigkeitshypothesen im ebenen Fall durch Polygonzüge in der Hauptspannungsebene beschrieben (vgl. die Abbn. 6.15a) und b)). Bei der *Hypothese der Gestaltänderungsenergie* wird der zulässige Bereich mit Hilfe einer analytischen Funktion definiert. Die Versagensgrenze ist dann auf einfachere Weise bestimmbar. Beim ebenen Spannungszustand ist ihre Form in der σ_1 - σ_2 -Hauptspannungsebene eine Ellipse, deren Hauptachsen um 45° geneigt sind und die den Polygonzug der Schubspannungshypothese umschließt. Diese Ellipse ist exemplarisch in Abb. 6.15c) dargestellt. Wir erhalten für ebene Spannungszustände somit

$$\sigma_{V, \text{Mises}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_F. \quad (6.38)$$

Diese Vergleichsspannung wird häufig auch als Vergleichsspannung nach von Mises (vgl. Infobox 7, S. 216) bezeichnet. Daher verwenden wir seinen Namen als Index. Bemerkte sei, dass diese Hypothese manchmal auch mit Maxymilian Tytus Huber (1872-1950, polnischer Ingenieur) oder mit Heinrich Hencky (1885-1951, deutscher Ingenieur) in Verbindung gebracht wird.

Die Gestaltänderungsenergiehypothese dient wie die Schubspannungshypothese zur Beurteilung von Versagen durch Fließen bei duktilen Werkstoffen. Sie weist allerdings gewöhnlich eine bessere Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen auf. Ihre Vergleichsspannung ist maximal 15 % größer als die der Schubspannungshypothese, weshalb die Tragfähigkeit weniger konservativ bewertet wird.

Beispiel 6.4 In Abschnitt 6.2 wird beispielhaft ein Flugzeugflügel hinsichtlich seiner Beanspruchungen basierend auf dem Superpositionsprinzip analysiert. Die Spannungszustände der einzelnen Beanspruchungen sind in Abschnitt 6.2 für den Lasteinleitungsbereich der Flügelstütze ermittelt und die grundsätzliche Superposition der einzelnen Beanspruchungen dargestellt. In diesem Beispiel werden wir nun diese Spannungszustände hinsichtlich Versagen unter Fließen für ausgewählte Punkte des idealisierten Flügelprofils beurteilen. Wir gehen davon aus, dass der Träger aus einem duktilen Werkstoff aufgebaut ist.

Gegeben Fließspannung σ_F ; Spannungen der Teilbeanspruchungen in den Profilpunkten A, C, D, E, G, H:

	A	C	D	E	G	H
σ_x [MPa]	54,17	-135,10	-133,53	-81,50	107,78	55,75
τ_{xy} [MPa]	25,68	25,68	35,31	2,81	2,81	35,31

Die Querschnittsbeanspruchungen und die Bezeichnungen der Punkte sind in den Abbn. 6.8 und 6.9 dargestellt.

Gesucht Bestimmen Sie die Sicherheit S gegen Fließen für die oben angegebenen Punkte des Profils.

Lösung Die Beanspruchung in der Trägerwand kann als ebener Spannungszustand idealisiert werden (vgl. die Abbn. 6.10a) bis c)), da keine Normalspannungen in Dickenrichtung auftreten und die Wanddicken klein im Vergleich zur Strukturlänge sind. Wegen verschwindender Umfangsspannungen gilt

$$\sigma_x, \tau_{xy} \neq 0, \quad \sigma_y = 0.$$

Aufgrund des eingesetzten duktilen Werkstoffs werden wir die Gestaltänderungsenergiehypothese zur Abschätzung der Sicherheit gegen Fließen nutzen. Mit Gl. (6.38) erhalten wir die Vergleichsspannung $\sigma_{V, Mises}$ und daraus die Sicherheit S für die Eckpunkte:

	A	C	D	E	G	H
$\sigma_{V, \text{Mises}}$ [MPa]	70,09	142,24	146,87	82,40	108,46	60,88
S [–]	4,7	2,3	2,2	4,0	3,0	5,4

Demnach weist der analysierte Flügelquerschnitt eine Sicherheit von 2,2 gegen Versagen auf.

Infobox 7 zu Richard von MISES (1883-1953, österreichischer Mathematiker und Ingenieur)^{1, 2}

Von Mises studierte Maschinenbau an der Technischen Universität Wien, wo er 1907 promovierte. Danach arbeitete er als wissenschaftlicher Assistent an der Hochschule Brünn (heute Brno in Tschechien). Nachdem er sich dort 1909 habilitierte, führte ihn seine nachfolgende wissenschaftliche Laufbahn an viele unterschiedliche Universitäten. Von 1909 bis 1914 lehrte er in Straßburg angewandte Mathematik. Nach dem Ende des 1. Weltkriegs hatte er den Lehrstuhl für Festigkeitslehre, Hydro- und Aerodynamik an der Technischen Universität Dresden inne (1919-1920). Danach war er Direktor des Instituts für angewandte Mathematik an der Universität Berlin (ab 1920) bis er 1933 einem Ruf an die Universität Istanbul folgte. Von 1939 an lehrte von Mises an der Harvard University in Cambridge (USA).

Begeistert durch die dynamische Entwicklung von motorisierten Fluggeräten Anfang des 20. Jahrhunderts beschäftigte sich von Mises anfänglich intensiv mit Aerodynamik und Flugzeugbau. Im Sommer 1913 hielt er einen Universitätskurs über die Mechanik des motorisierten Fluges, welcher als die erste Lehrveranstaltung auf diesem Gebiet gilt. Beim Ausbruch des 1. Weltkrieges 1914 meldete er sich freiwillig zu den österreichisch-ungarischen Fliegertruppen. Als Pilot kam er nur kurz zum Einsatz. Überwiegend schulte er Offiziere über Fluglehre und leitete die Konstruktion und den Bau eines Großflugzeugs, dessen Tragflügeldesign maßgeblich von ihm stammte. Die zu Beginn seiner Karriere entstandenen Schriften im Bereich Ingenieurwissenschaften besaßen für die damalige Zeit enorme Relevanz, was sich an den zahlreichen und z. T. noch nach Jahrzehnten kaum veränderten Auflagen und Übersetzungen dieser Schriften zeigt.

¹ Gridgeman N. T.: Mises, Richard von. In: Gillispie C. C. (Hrsg.): Dictionary of Scientific Biography, Bd. IX, Scribner-Verlag, 1974, S. 419-420.

² Märker K.: Mises, Richard. In: Neue Deutsche Biographie 17 (1994), S. 564-566.

6.4 Zusammenfassung

Berechnung bei kombinierter Beanspruchung

- Zerlegung der Belastung in die Grundbeanspruchungen Zug/Druck, Biegung, Querkraftschub und Torsion
- Ermittlung der Spannungszustände für die Grundbeanspruchungen
- Superposition der einzelnen Spannungszustände zu einem resultierenden Zustand

Festigkeithypothesen für ebene Spannungszustände

- Normalspannungshypothese für Zugversagen bei spröden Werkstoffen

$$\sigma_{V,NH} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_B$$

- Schubspannungshypothese für Versagen durch Fließen bei duktilen Werkstoffen

$$\sigma_{V,SH} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_F$$

- Gestaltänderungsenergiehypothese bzw. Fließbedingung nach von Mises für Versagen durch Fließen bei duktilen Werkstoffen

$$\sigma_{V,Mises} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_F$$

6.5 Verständnisfragen

1. Erklären Sie das Superpositionsprinzip zur Berechnung von Spannungszuständen und nennen Sie die Voraussetzungen, unter denen es anwendbar ist.
2. Kann das Superpositionsprinzip auch zur Ermittlung von Verschiebungsgrößen genutzt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Wie werden Normal- und Schubspannungen zu einem resultierenden Spannungszustand superponiert? Erläutern Sie die Superposition anhand einer Skizze.
4. Wie können die Begriffe Versagen, Bruch und Fließen voneinander differenziert werden?
5. Was ist eine Vergleichsspannung und wozu wird sie verwendet?
6. Wann ist die Normalspannungshypothese anwendbar?
7. Warum treten in der Vergleichsspannung der Schubspannungshypothese für eine ebene Beanspruchung die Beträge der beiden Hauptnormalspannungen auf? Erläutern Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Mohrschen Spannungskreise.

8. Skizzieren Sie die Versagensebenen im Raum bei der Schubspannungshypothese und korrelieren Sie diese mit dem jeweiligen Spannungszustand im Mohrschen Spannungskreis.
9. Skizzieren Sie die Hypothese der Gestaltänderungsenergie im Hauptspannungsdiagramm für ebene Spannungszustände.
10. Welche Festigkeitshypothesen eignen sich zur Vorhersage der Versagensgrenze bei duktilen Werkstoffen?