

Klaus-Dieter Sommer und Rüdiger Kessel

---

### 2.1 Einführung

Messungen, Messergebnisse und darauf aufbauende Entscheidungen sind aus unserem Leben nicht wegzudenken. Fast alle Sphären, wie Produktion, Handel, Energieerzeugung und -nutzung, Umwelt, Gesundheit sowie Sicherheit sind davon berührt: Überall verlassen wir uns auf die Richtigkeit von Messergebnissen und auf die Plausibilität der möglicherweise in der Folge dieser Ergebnisse getroffenen Entscheidungen. Beispiele sind die Weiterverwendung eines Werkstückes, das vorgegebene Spezifikationsgrenzen einhält, die Entscheidung über eine Behandlung, weil der Cholesterinwert zu hoch ist, oder die Sperrung bestimmter urbaner Bereiche für den automobilen Verkehr, weil die Feinstaubbelastung zu hoch ist. Ziel von Messungen ist es, eine ausgewählte Ziel- bzw. Messgröße (BIPM 2008a) quantitativ zu bewerten, ihr also einen Wert zuzuweisen. Beispielsweise könnte mit Hilfe eines oder mehrerer Temperatursensoren sowie Anzeigegegeräten die Temperatur eines Messraumes bestimmt werden.

Der Wert einer Messgröße  $Y$ , wie er als Ergebnis einer Messung oder durch Berechnung (bei indirekten Messmethoden (BIPM 2008a)) erhalten wird, kann als Produkt seines numerischen Wertes  $\{Y\}$  und der Einheit  $[Y]$  (BIPM 2006, 2008a; ISO 2009) geschrieben werden. Die Einheit kann als „Referenzgröße“ aufgefasst werden:

$$Y = \{Y\} \times [Y]. \quad (2.1)$$

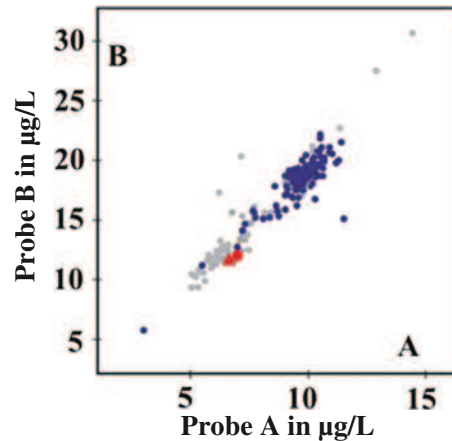
Ein Beispiel ist die Länge eines Werkstückes  $L_{WS}(t_{20})$  bei der Temperatur  $t_{20} = 20\text{ °C}$ . Der numerische Wert der gemessenen Länge des Werkstückes  $l_{WS}$  sei  $\{L_{WS}\}$  und hängt von der gewählten Längeneinheit  $[L_{WS}]$  (und der Temperatur) ab. Im weiteren Text nehmen wir daher an, dass nur Einheiten verwendet werden, die kohärent zum SI (BIPM 2006) sind.

---

K.-D. Sommer (✉) · R. Kessel  
Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Chemische Physik und Explosionsschutz,  
Bundesallee 100, 38116 Braunschweig, Germany  
e-mail: klaus-dieter.sommer@ptb.de

H. Tränkler und L. Reindl (Hrsg.), *Sensortechnik*,  
DOI: 10.1007/978-3-642-29942-1\_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014

**Abb. 2.1** IDMS-Ergebnisse für ein Wachstumshormon im Vergleich mit Ergebnissen, die mit standardisierten Methoden von Prüflaboratorien im Rahmen einer externen Qualitätssicherungsmaßnahme erreicht wurden. (Quelle (Asenne et al. 2010))

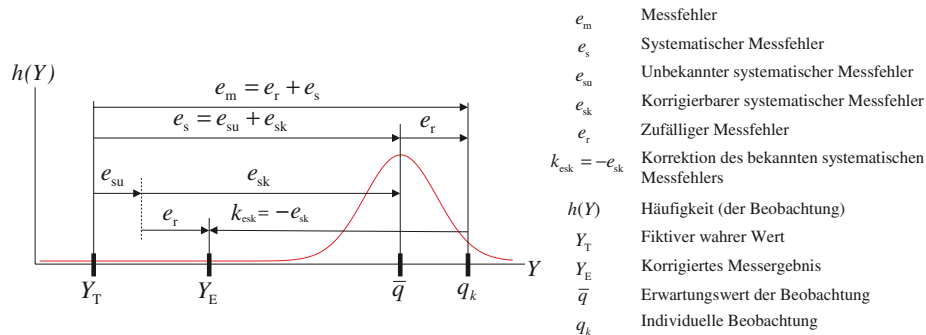


Die praktische messtechnische Erfahrung zeigt nun, dass wiederholte Messungen derselben Länge eines Werkstückes bei denselben Bedingungen und durchgeführt von derselben Person zu leicht unterschiedlichen Werten für die Messgröße führen können, die Werte also streuen. Diese Streuung kann sich deutlich verstärken, wenn an der Bestimmung der Länge z. B. mehrere Laboratorien mit verschiedenen Messverfahren (BIPM 2008) beteiligt sind; dann können die Ergebnisse auch systematisch voneinander abweichen. Abbildung 2.1 illustriert diese Effekte an einem Beispiel aus der klinischen Chemie. Das Beispiel zeigt Ergebnisse der Bestimmung einer Doppelprobe eines Wachstumshormons durch verschiedene Prüflaboratorien im Vergleich mit Referenzresultaten, dargestellt in einem sog. *Youden-Diagramm* (Lichtinghagen). Die Referenzmessungen wurden mittels Isotopenverdünnungs-Massenspektrometrie durchgeführt (Asenne et al. 2010). Das Beispiel verdeutlicht nicht nur die relativ großen Streuungen der Routinemethoden (erkennbar durch Punkte, die nicht auf der Diagonalen liegen), sondern auch ihre großen systematischen Abweichungen untereinander (erkennbar an der Verteilung der Punkte entlang der Diagonalen).

Dies wirft insbesondere die folgenden Fragen auf (BIPM 2008; ISO 2009; DIN 1319):

- Ist einer der numerischen Werte (siehe Abb. 2.1) der (sog. „wahre“) Wert der Messgröße und gibt es dafür vertrauenswürdige Schätzungen?
- Wie erfolgt der quantitative Vergleich der Messgröße mit der gewählten Einheit und wodurch und in welchem Maße wird dieser Vergleich beeinflusst?
- Wie gibt man das Ergebnis des quantitativen Vergleichs bzw. der Messung an und wie bewertet man dessen Güte?

In Abschn. 2.2 werden die bekanntesten Ansätze zur Beantwortung der genannten Fragestellungen, die „klassische“ Fehlerrechnung (DIN 1319) und der Messunsicherheitsansatz (Weckenmann 2006; Weise und Woeger 1999), in kurzer Form gegenübergestellt. Im Weiteren wird der auf der Bayes'schen Wahrscheinlichkeitstheorie (Siebert und Sommer 2010; Beyerer 1999; Sivia 1996) fußende Unsicherheitsansatz des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ (GUM) ausführlich unter Verwendung von Beispielen aus dem Bereich der Sensorkalibrierung behandelt.



**Abb. 2.2** Relevante Größen beim klassischen Fehlerrechnungsansatz gem. DIN 1319-3:1968 (DIN 1319)

## 2.2 Fehlerrechnung und Messunsicherheitsansatz

In der „klassischen“ *Fehlerrechnung* (DIN 1319) spielt die Abweichung vom sog. *wahren Wert* eine zentrale Rolle. Als *wahrer Wert* einer Messgröße wird der unbekannte fiktive, sowie einzige und konstante Wert betrachtet, den man unter idealen Bedingungen messen würde. In der Realität lässt sich der Wert einer Größe aber nur auf der Grundlage vorhandener Kenntnisse schätzen. Das Messergebnis wird als Zufallsvariable aufgefasst, die ein sog. erwartungstreuer Schätzer für den (wahren) Wert der Messgröße sein soll.

In der Fehlerrechnung geht man davon aus, dass das Messverfahren im Wesentlichen zufällige, d. h. in der Summe sich weitgehend kompensierende Abweichungen generiert, die mit den Methoden der Stichproben-Analyse beschreib- und beherrschbar sind. Zweifelsfrei ebenfalls vorhandene systematische Abweichungen werden hingegen als im Grunde erkenn- und erfassbar und damit letztlich korrigierbar angesehen. Abbildung 2.2 zeigt eine Darstellung aus der inzwischen grundlegend überarbeiteten DIN-Norm 1319-3:1968 (DIN 1319), die diese Auffassung anschaulich wiedergibt.

Die der Fehlerrechnung zugrundeliegende Modellvorstellung ermöglicht eine einfache Beschreibung und Klassifizierung der Leistungsfähigkeit von Messsystemen auf der Basis wiederholter Beobachtungen derselben Messgröße unter Nutzung statistischer Kenntnisse. Der Ansatz und die daraus abgeleiteten statistischen Methoden zur Erfassung der Unvollkommenheiten von Messungen fanden daher in der Praxis sowie in der einschlägigen Ausbildung weite Verbreitung. Er erlaubt aber nicht, die Unvollständigkeit unseres Wissens über die an einer Messung beteiligten Größen ausreichend zu berücksichtigen, wenn die vorhandenen „unscharfen“ Kenntnisse nichtstatistischen Ursprungs sind.

Die Fehlerrechnung konnte daher mit der Entwicklung der Messgeräte- und Messsystemtheorie nicht mehr Schritt halten: In den 50er und 60er Jahren des letzten Jahrhunderts wurde die Digitaltechnik mit (zunächst) einfachen elektronischen Speichern, A/D-Wandlern und auch einer ganz neuen Theorie, der Informationstheorie (Cover und Thomas 2006), entwickelt.

Die Digitaltechnik eröffnete die Möglichkeit, Messungen automatisch unter konstanten Bedingungen beliebig oft zu wiederholen. Dem Mittelwert solcher wiederholter

Beobachtungen kann nach den bekannten Regeln der Stichprobenstatistik die Standardabweichung

$$s_{\bar{q}} = \frac{s_{qk}}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad s_{qk} = \frac{1}{(n-1)} \sum (q_k - \bar{q})^2 \quad (2.2)$$

zugeordnet werden, die als Maß für die Wiederholbarkeit und damit die Verlässlichkeit des Messergebnisses betrachtet werden könnte. Der umgangssprachlich auch als „Fleißfaktor“ bezeichnete Koeffizient  $1/\sqrt{n}$  führt nun bei Verwendung zahlreicher wiederholter Beobachtungen zu außerordentlich optimistischen Einschätzungen der Güte der ermittelten Messergebnisse. Allerdings zeigten Vergleichsmessungen zwischen Laboratorien, dass offensichtlich unentdeckte systematische Effekte einer Konsistenz der solcherart erhaltenen Ergebnisgruppen im Wege stehen. Diese ungeklärten systematischen Abweichungen wurden dann (richtigerweise) als *unbekannte systematische Abweichungen* bezeichnet (BIPM 2008a), und da sie weder richtig den zufälligen noch den systematischen Effekten zuzuordnen waren, noch eine klare Linie zu ihrer Berücksichtigung existierte, wurde zunehmend klar, dass die klassische Fehlerrechnung für die Beschreibung der Qualität von Messungen nicht ausreichend sein kann. Im Gegensatz zu den sog. *bekannt systematischen Abweichungen* (BIPM 2008a) sind sog. *unbekannte systematische Abweichungen* weder bekannt noch korrigierbar. Rein qualitativ könnten sie als „unsicherer Anteil“ der so genannten bekannten systematischen Abweichungen verstanden werden (Weise und Woeger 1999; Woeger 2001).

Hinzu kommt die Tatsache, dass die Entwicklung der Messtechnologie bezüglich der Reproduzierbarkeit und Wiederholbarkeit immer bessere Messsysteme hervorbrachte und mithin gerade die unbekannt systematischen Effekte eine dominierende Bedeutung erlangt haben. Das führte Mitte der siebziger Jahre zu den ersten internationalen Arbeiten am späteren „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ (GUM) (GUM 1995), die im Jahr 1995 zu einem vorläufigen Abschluss kamen.

---

### 2.3 Einführung in das Unsicherheitskonzept des GUM

Für die Bewertung und Angabe eines Güte- oder Qualitätsparameters für ein Messergebnis hat sich in den letzten beiden Jahrzehnten der von der Internationalen Standardisierungsorganisation ISO im Auftrage mehrerer internationaler Organisationen, allen voran das International Committee for Weights and Measures (CIPM), herausgegebene „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“, kurz GUM (GUM 1995) als international akzeptiertes Leitdokument durchgesetzt. In deutscher Sprache existiert es als Vornorm DIN V ENV 13005 „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ (DIN V ENV 13005:1999-06 1999).

Das Standard-GUM-Verfahren (GUM 1995), auch ISO-GUM-Verfahren genannt, ist in der deutschsprachigen Literatur bereits mehrfach beschrieben worden. Genannt seien u. a. die Beiträge von (Kessel 2001a, b; Sommer und Siebert (2004); Siebert und Sommer

(2004); Krystek (2012); Adunka (2007) sowie von Weckenmann (2006). Die Vorteile des Standard-GUM-Verfahrens können wie folgt charakterisiert werden (Kacker et al. 2007):

- Das Standard-GUM-Verfahren liefert ein konsistentes, schrittweises Verfahren zur Bewertung und Angabe der Messunsicherheit.
- Das Verfahren beruht auf einer wahrscheinlichkeitstheoretischen (probabilistischen) Beschreibung von Kenntnissen über die Messung und die relevanten Einflussgrößen (Bayes'sche Grundlage)
- Es schließt die systematische und konsistente Behandlung von nichtstatistischen Informationen ein.
- Es verwendet ein deterministisches mathematisches Modell der Auswertung, um die am Messprozess beteiligten Größen einschließlich der Ergebnisgröße zu verknüpfen.
- Es eröffnet die Möglichkeit zu einer relativ einfachen computergestützten Messunsicherheitsberechnung und -bilanzierung.

Aus Sicht der klassischen Fehlerrechnung kommt das Verfahren des GUM einem Paradigmenwechsel gleich: Statt zu versuchen, die vom Verfahren verursachten Abweichungen von einem fiktiven idealen Wert zu quantifizieren (BIPM 2008a; DIN 1319), wird nun von den vorhandenen Kenntnissen ausgegangen und diese werden nach vorgegebenen Regeln bewertet. Das Ziel ist es dabei, in einem nachvollziehbaren Verfahren einen Parameter, die Messunsicherheit, zu ermitteln, der die Qualität und Verlässlichkeit des Messergebnisses beschreibt.

Die wichtigsten Teilaufgaben der Messunsicherheitsbestimmung, basierend auf den vorhandenen Kenntnissen, sind nun:

- Systematisches Zusammentragen von Kenntnissen über die durchzuführende Messung,
- Modellieren der Messung durch Aufstellen des mathematischen Zusammenhangs zwischen der Messgröße und den relevanten Einflussgrößen, sowie
- Einschätzen der relevanten Eingangsgrößen mit Hilfe von Wahrscheinlichkeits-Dichteverteilungen.

Im Gegensatz zur schematischen Sammlung von Informationen durch Beobachtung bei der Fehlerrechnung erfordert die Modellbildung für die Messung ein fundiertes Verständnis der durchgeführten Messung. Die daraus resultierenden Anforderungen standen der eigentlich gewünschten schnellen Umsetzung des ISO-GUM-Konzeptes zunächst im Wege. Erst die weitere Entwicklung rechnergestützter Modellbildungs-Assistenzsysteme in Verbindung mit numerischen Lösungsansätzen (Heidenblut et al. 2007) schaffte hier eine deutliche Entspannung.

Der kritischste Punkt, die konsistente Beschreibung nichtstatistischer Kenntnisse über Größen und Variablen, wurde dadurch einer Lösung zugeführt (Kacker et al. 2007), dass man für alle Unvollkommenheiten und ebenso für unvollständiges Wissen, z. B. über Arbeitspunkte und Einflussgrößen, eine Beschreibung auf der Basis der Wahrscheinlichkeitstheorie wählte, auch wenn dies in der Ausgabe des GUM von 1995

(GUM 1995) nicht explizit dargelegt wurde. Das neue Konzept steht damit trotzdem klar auf der Grundlage der Bayes-Laplace'schen Wahrscheinlichkeitstheorie (BIPM: JCGM 2009).

## 2.4 Grundprinzipien des ISO-GUM-Konzepts

### 2.4.1 Ursache und Wirkung bei einer Messung

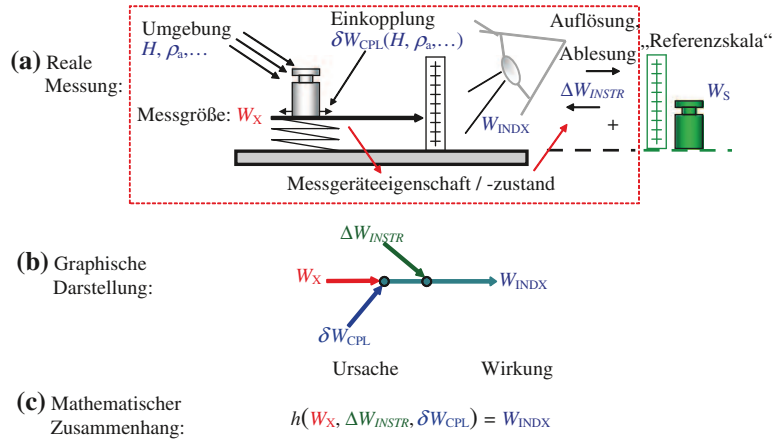
Die Anzeige eines Messgerätes ist in der Regel nicht nur abhängig von der an seinem „physikalischen Eingang“ wirkenden Größe, der Messgröße, für deren Messung es (ursprünglich) konzipiert und gebaut wurde, sondern auch von weiteren (äußeren) Einflussgrößen, z. B. den Umgebungsbedingungen oder auch vom Alterungszustand (Degradation). Abbildung 2.3 illustriert an einem bekannten Beispiel (Sommer und Siebert 2004) einer direkten Wägung diese Ursache-Wirkungs-Betrachtungsweise: Die Anzeige wird sowohl von der zu messenden Größe  $W_x$  als auch von der Unvollkommenheit ihrer „Einkopplung“ in das Messgerät (symbolisiert durch die Abweichung  $\delta W_{\text{CPL}}(H, \rho_a, \dots)$ , z. B. infolge der Einflüsse magnetischer Felder  $H$  oder des Luftauftriebs, sowie gegebenenfalls den realen Messgeräteeigenschaften (symbolisiert durch die Messabweichung des Messgerätes  $\Delta W_{\text{INSTR}}$ ) bestimmt. Mathematisch kann der in den Abbildungen 2.3a, b dargestellte Ursache-Wirkungs-Zusammenhang durch die funktionale Abhängigkeit der Form  $X_1 = h(Y, X_2, X_3)$  ausgedrückt werden, die auch als Modell der Messung oder Messmodell bezeichnet wird. Invertieren (Auflösen nach der Messgröße) führt zum sog. Modell der Auswertung (auch Messfunktion (BIPM 2008a) genannt). In allgemeiner Form lautet diese Funktion:

$$Y = h^{-1}(X_1, X_2, \dots, X_N) = f_M(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (2.3)$$

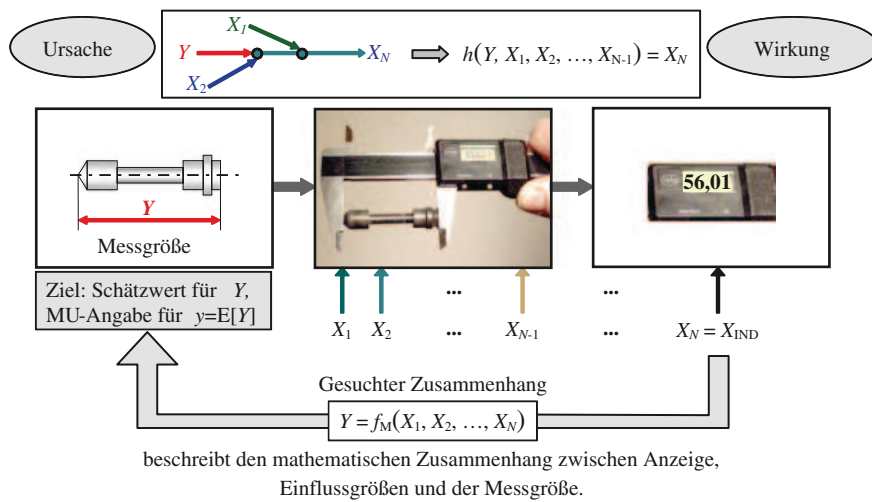
$X_1, X_2, \dots, X_N$  werden allgemein als Eingangsgrößen bezeichnet. Der ISO-GUM (GUM 1995) geht üblicherweise nur von einer Ausgangsgröße (Messgröße) aus. Das Konzept kann aber leicht auf mehr als eine Ausgangsgröße erweitert werden (BIPM 2011).

Ziel ist es nun, einen besten Schätzwert der Ausgangsgröße  $y = E[Y]$  (Erwartungswert von  $Y$ ) und eine zugehörige Messunsicherheit (BIPM 2008a; GUM 1995) als Güteparameter für den Schätzwert  $y$  zu bestimmen. Grundlage dafür sind jeweils die unvollständigen Kenntnisse über den Messprozess, d. h. über das Modell der Auswertung und die Eingangsgrößen  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

Diese Darstellung ist von entscheidender Bedeutung: Der Bestimmung der Messunsicherheit liegt immer die Lösung eines inversen Problems zugrunde. Aus dem Ursache-Wirkungs-Zusammenhang, der Kenntnis der Einflussgrößen und der Ausgabe oder Anzeige des Messgerätes soll auf einen (wahrscheinlichen) Wert der Messgröße  $y = E[Y]$  „zurückgeschlossen“ werden (Bayes'sche Inferenz (Lira 2002), siehe Abb. 2.4 (Weckenmann 2006)).



**Abb. 2.3** Grundlegende Idee von der Ursache und Wirkung einer Messung (Sommer und Siebert 2004). **a** Reale Messung. **b** Graphische Darstellung. **c** Mathematischer Zusammenhang



**Abb. 2.4** Entwicklung eines Modells der Auswertung auf der Basis der Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge am Beispiel einer Längenmessung (Weckenmann 2006)

Aufgrund der Unvollkommenheit der Messung und der Unvollständigkeit der Kenntnisse darüber kann das immer nur eine „qualifizierte Schätzung“ sein. Grundlage der Messdatenauswertung und Unsicherheitsermittlung ist dabei die Messfunktion, d. h. der nach der Messgröße aufgelöste (invertierte) Ursache-Wirkungs-Zusammenhang (BIPM 2008a; GUM 1995).

## 2.4.2 Mathematisches Bewerten der Kenntnisse über die Eingangsgrößen

Es ist eine offensichtliche Tatsache, dass reale Messprozesse niemals vollkommen beherrschbar sind und dass Parameter eines Messprozesses (Arbeitspunkte, Werte von Einflussgrößen etc.) niemals vollständig bekannt sind. Das ist sowohl in der physikalischen Natur der Sache als auch in der Unvollkommenheit der Mittel zur Beobachtung und Beschreibung begründet.

Demzufolge kann das vollständige Wissen über eine messbare Größe niemals nur durch einen einzigen Wert charakterisiert werden.

Gemäß der Bayes-Laplace'schen Grundlage (BIPM 2008b) des ISO-GUM-Konzeptes (BIPM: JCGM 2009) werden die stets unvollständigen Kenntnisse über die möglichen Werte einer Größe  $X$  mittels Zuweisung einer Wahrscheinlichkeits-Dichteverteilung (Probability Density Function, kurz PDF)  $g_X(\xi)$  beschrieben. Damit werden unvollständige Kenntnisse mathematisch handhabbar und die bekannten Werkzeuge der Wahrscheinlichkeitsrechnung können zur Berechnung des vollständigen Messergebnisses genutzt werden (BIPM 2008a; Siebert und Sommer 2010; GUM 1995).

In der industriellen messtechnischen Praxis sind Wahrscheinlichkeits-Dichteverteilungen aber nicht das gewünschte Ergebnis einer Messung. Deshalb verwendet der GUM den Erwartungswert der PDF als besten Schätzwert für den Wert  $x$  der Größe  $X$  (siehe Gl. (2.4)), und die Standardabweichung der PDF (Wurzel aus der Varianz) als die dem Erwartungswert beigeordnete Standardunsicherheit  $u(x)$  (siehe Gl. (2.5)). Erwartungswert und Varianz sind wie folgt definiert:

Erwartungswert einer Größe  $X$ :

$$x = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi g_X(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

Varianz einer Größe  $X$ :

$$u^2(x) = \text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^2 g_X(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

Hinweis: Die Schreibweise  $u(x)$  ist eine zweckmäßige Abkürzung für die dem Schätzwert  $x$  beigeordnete Standardmessunsicherheit. Es handelt sich dabei aber nicht um einen funktionalen Zusammenhang.

Mit diesem Ansatz werden die PDFs zu Trägern der Information über die Größen. Aber wie erhält man nun die passende PDF, die die vorhandenen Kenntnisse über die betrachtete Größe am besten reflektiert? Die Antwort liegt in der Anwendung des sog. Prinzips der maximalen Informationsentropie (Principle of Maximum Entropy, PME) (Weise und Woeger 1999; GUM 1995; Krystek 2012; Lira 2002; Jaynes 1957; Fougère 1990; Lira 2002), welches federführend von Jaynes (1957) entwickelt wurde. Es



ermöglicht erst die Anwendung der Bayes-Theorie, welche auf in der Regel nur sehr vage bekannte A-Priori-Kenntnisse angewiesen ist. Das PME erlaubt, einer bestimmten Art von Vorwissen unter Anwendung der Regeln der Informationstheorie (Krystek 2012; BIPM 2008a) bestimmte A-Priori-Verteilungen zuzuordnen.

Dieses Prinzip führt zur sog. Ermittlungsmethode Typ B des GUM (GUM 1995) (siehe Abschn. 2.4.3), zum Beispiel

- zu einer rechteckförmigen PDF, wenn die Kenntnisse so sind, dass die möglichen Werte in einem (im Verhältnis zum Messbereich engen) Intervall enthalten und Werte außerhalb dieses Intervalls unwahrscheinlich sind (Beispiele: digitale Auflösung, Fehlergrenzen, Toleranzen), oder
- zu einer Gauß'schen Normalverteilung, wenn ein bester herausgehobener Schätzwert und eine davon unabhängige beigeordnete Varianz/Unsicherheit bekannt sind (Beispiele: Angabe eines Kalibrierergebnisses, Ergebnis einer statistischen Analyse etc.) (Sommer und Siebert 2004).

Für die praktische Anwendung reicht es völlig aus, die Art der Kenntnisse und einige relevante Angaben zu kennen, um nach dem PME eine A-Priori-PDF aufstellen zu können; hinzu kommt, dass dafür leistungsfähige Softwareassistenz zu Verfügung steht (Mieke et al. 2008; Weckenmann und Wiedenhöfer 2005). Die häufigsten Fälle sind in Tab. 2.1 zusammengestellt.

### 2.4.3 Ermittlungsmethoden Typ A und Typ B

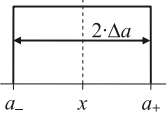

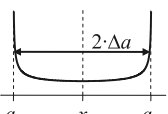
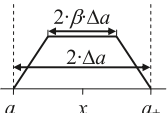
Häufig liegen in der Praxis über die Größen, die für die Auswertung einer Messung verwendet werden, unterschiedlich strukturierte Informationen vor (siehe Abschn. 2.4.2). In Anlehnung an die traditionelle Unterteilung in zufällige und (unbekannte) systematische Messabweichungen wird im GUM zwischen statistischen und nicht-statistischen Kenntnissen unterschieden. Der GUM führt deshalb pragmatisch zwei Methoden zur Auswertung ein, die Typ A (für statistische Kenntnisse) und Typ B (für nicht-statistische Kenntnisse) genannt werden.

Abbildung 2.5 zeigt die Gegenüberstellung der beiden Methoden Typ A und Typ B (Sommer und Siebert 2004). Mit Typ A werden statistische Methoden bezeichnet. Sie werden angewendet, wenn die Auswertung auf der Basis einer Datenreihe von wiederholten Beobachtungen derselben Größe erfolgt. Dabei werden die Ergebnisse einer klassischen (Stichproben-)Statistik probabilistisch als Erwartungswert und Varianz einer Wahrscheinlichkeitsverteilung interpretiert (Kacker et al. 2007).

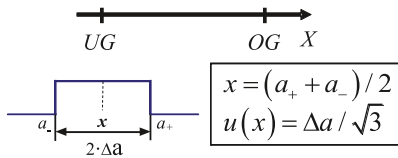
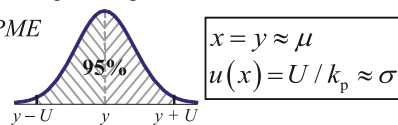
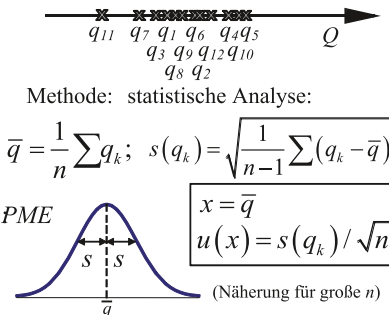
Mit Typ B werden alle anderen Methoden bezeichnet. In der Praxis wird bei Typ B immer eine Wahrscheinlichkeits-Dichteverteilung (PDF) auf der Basis der Kenntnisse über die Größe und des PME gewählt (siehe Abschn. 2.4.2 und Tab. 2.1).

Bei der Beschreibung einer Größe nach Typ A wird diese durch statistische Beobachtungen eingeschätzt, d. h. es wird im Sinne der klassischen Statistik von einer Stichprobe

**Tab. 2.1** Zusammenhang zwischen der Art der vorliegenden Kenntnisse und der nach dem Prinzip der maximalen Informationsentropie (PME) zuzuordnenden Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (PDF) einschließlich der resultierenden Erwartungswerte und Standardunsicherheiten (Sommer und Siebert 2004; BIPM 2008b)

Kenntnisse über die Größe	Zuzuordnende PDF	Erwartungswert	Standardmessunsicherheit
Mögliche Werte sind in einem Intervall $[a_-, a_+]$ enthalten		$x = \frac{(a_+ + a_-)}{2}$	$u(x) = \frac{\Delta a}{\sqrt{3}}$
Der Erwartungswert $\mu$ und Standardabweichung $\sigma$ sind bekannt		$x = \mu$	$u(x) = \sigma$
Die Größe lässt sich durch die Funktion $X = \Delta a \cdot \sin \Phi$ beschreiben; der Phasenwinkel $\Phi$ ist unbekannt		$x = 0$	$u(x) = \frac{\Delta a}{\sqrt{2}}$
Die Größe ist Summe oder Differenz zweier Größen $X_1, X_2$ ; $X_1, X_2$ sind rechteckförmige Verteilungen zugeordnet.		$x = x_1 \pm x_2$	$u(x) = \Delta a / \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 + \beta^2}$ mit $\Delta a = \Delta a_1 + \Delta a_2$ $\beta =  \Delta a_1 - \Delta a_2  / (\Delta a_1 + \Delta a_2)$

**Kenntnisse über die Parameter und (Einfluss-) Größen**

<p><b>B</b> nicht-statistischer Art Beispiel: untere und obere Grenzen</p>  <p><math>x = (a_+ + a_-) / 2</math> <math>u(x) = \Delta a / \sqrt{3}</math></p> <p>Beispiel: Angabe im Kalibrierschein</p>  <p><math>x = y \approx \mu</math> <math>u(x) = U / k_p \approx \sigma</math></p>	<p><b>A</b> statistischer Art Beispiel: Beobachtungsreihe</p>  <p>Methode: statistische Analyse:</p> <p><math>\bar{q} = \frac{1}{n} \sum q_k; s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (q_k - \bar{q})^2}</math></p> <p><math>x = \bar{q}</math> <math>u(x) = s(q_k) / \sqrt{n}</math> (Näherung für große n)</p>
--	--

**Abb. 2.5** Gegenüberstellung der Methoden Typ A und Typ B zur Bewertung von Eingangsgrößen für die Messunsicherheitsanalyse (Sommer und Siebert 2004)

auf die Grundgesamtheit geschlossen. Bei der Beschreibung nach Typ B werden dagegen nicht-statistische Kenntnisse aus anderen Quellen verwendet, z. B. Angaben in Dokumenten. Dadurch wurde die bisherige rein statistische Beobachtung der Fehlerrechnung durch die Möglichkeit ergänzt, weitere Kenntnisse geeignet zu berücksichtigen.

Hintergrund der Beibehaltung der statistischen Stichprobenanalyse war die „gutgemeinte“ Absicht, die klassische Fehlerrechnung nicht komplett abzuschaffen, sondern zu ergänzen. Es wurde also zusätzlich zur statistischen Stichprobenanalyse die auf der Bayes-Laplace-Theorie (Krystek 2012; Jaynes 1957) fußende so genannte Ermittlungsmethode Typ B eingeführt, mit der nicht-statistische Kenntnisse bewertet werden können. Im Falle der Typ A-Bewertung werden die Stichprobenparameter denen der (fiktiv) zugrundeliegenden Verteilungen gleichgesetzt, was natürlich nur für ausreichend große Stichproben ( $N > 100$ ) gilt. Als eleganter Ausweg bietet sich an, die Stichprobenvarianz nur zur Parametrisierung der Varianz der Student-t-Verteilung zu verwenden (BIPM 2008b), womit realistischere Resultate erzielt werden.

#### 2.4.4 Unsicherheitsfortpflanzung und Erwartungswert der Ausgangsgröße

Nach den gleichen Regeln wie für die Eingangsgrößen ließen sich prinzipiell auch aus der gemeinsamen PDF der Ausgangsgröße  $Y$ , d. h. der Messgröße, der Erwartungswert und die ihm zugeordnete (Standard-) Messunsicherheit ableiten (siehe Gl. (2.4) und (2.5)). Dabei seien  $y$  die möglichen Werte, die die Ausgangsgröße  $Y$  annehmen kann.

Allerdings kann die Bestimmung der PDF der Ausgangsgröße sehr aufwendig und rechenintensiv sein (Siebert und Sommer 2004; BIPM 2008b). Daher wurde im GUM (GUM 1995) ein einfacheres Verfahren vorgeschlagen, bei dem nur die beiden in der Praxis benötigten Parameter direkt ermittelt werden. Im GUM Supplement 1 (BIPM 2008b) wurde später (2008) mit der Monte-Carlo-Methode ergänzend ein Verfahren beschrieben, mit dem die PDF der Ergebnisgröße numerisch bestimmt werden kann.

Das Standard-GUM-Verfahren verwendet den Weg der Gauß'schen Unsicherheitsfortpflanzung und berechnet einen Erwartungswert (besten Schätzwert) und eine Unsicherheit für die Ergebnisgröße: Diese Messunsicherheitsfortpflanzung beruht auf den Regeln der klassischen *Gauß'schen Fehlerfortpflanzung*. Dabei werden die Abhängigkeiten der Ausgangsgröße von den Eingangsgrößen mittels einer linearen Taylor-Reihenentwicklung am Arbeitspunkt der Messung erfasst. Als Beispiel sei eine Abhängigkeit eines Volumens von der Temperatur gegeben als:

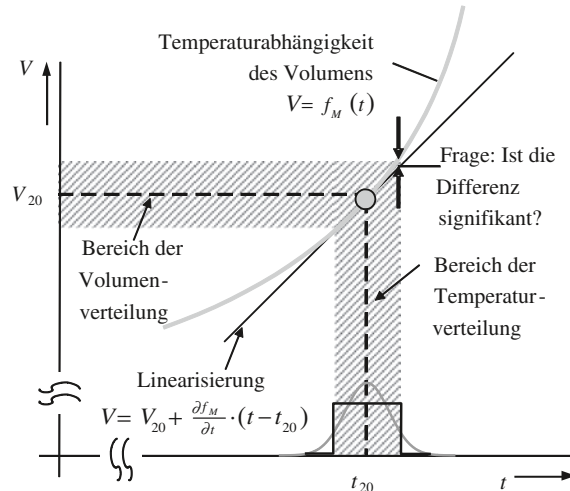
$$V = f_M(t). \quad (2.6)$$

Die Taylorentwicklung dieser Funktion (Gl. 2.6) am Arbeitspunkt  $t_{20}$

$$f_{t_{20}}(t) = f_M(t_{20}) + \left[ \frac{\partial f_M}{\partial t} \Big|_{t_{20}} (t - t_{20}) \right] + \left[ \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_M}{\partial t^2} \Big|_{t_{20}} (t - t_{20})^2 \right] + \dots \quad (2.7)$$

wird nach dem ersten Glied abgebrochen und damit erhält man das lineare Ersatzmodell für die Unsicherheitsfortpflanzung. Für dieses lineare Ersatzmodell sind die Sensitivitätskoeffizienten

**Abb. 2.6** Linearisierungseffekt infolge des linearen GUM-Ansatzes (Sommer und Siebert 2004)



$$c_i = \left. \frac{\partial f_M}{\partial X_i} \right|_{x_i} = \frac{\partial f_M}{\partial x_i} \quad (2.8)$$

definiert, die darüber Auskunft geben, wie die Messunsicherheiten der Eingangsgrößen auf die Messunsicherheit des Ergebnisses „übertragen“ werden. Der Unsicherheitsbeitrag  $u_i(y)$  der Eingangsgröße  $x_i$  zur Ergebnisgröße  $y$  ist somit das Produkt aus der Standardmessunsicherheit der Eingangsgröße und dem entsprechenden Sensitivitätskoeffizienten:

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i). \quad (2.9)$$

Bei der Linearisierung wird vorausgesetzt, dass zumindest in ausreichend schmalen Bereichen um die Erwartungswerte der Größen, d. h. um ihre Arbeitspunkte, die Zusammenhänge von Ausgangs- und Eingangsgrößen durch ein lineares Ersatzmodell beschrieben werden können. Das wird in Abb. 2.6 illustriert (Sommer und Siebert 2004).

Durch quadratische Addition der Unsicherheitsbeiträge (Gauß'sche Unsicherheitsfortpflanzung, Gl. (2.10)) lässt sich die kombinierte Messunsicherheit des Ergebnisses berechnen

$$u(y) = \sqrt{\sum_i u_i^2(y)} = \sqrt{\sum_i c_i^2 \cdot u^2(x_i)}, \quad (2.10)$$

sofern die Eingangsgrößen nicht korreliert sind. Um Korrelationen zu berücksichtigen, muss Gl. (2.10) um die Korrelationsterme erweitert werden:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2(y) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n r(x_i, x_j) \cdot u_i(y) \cdot u_j(y)}, \quad (2.11)$$

dabei ist  $r(x_i, x_j)$  der Korrelationskoeffizient zwischen  $x_i$  und  $x_j$ , der gleich dem Verhältnis der Kovarianz  $u(x_i, x_j)$  zum Produkt der Messunsicherheiten  $u(x_i)$  und  $u(x_j)$  ist:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) \cdot u(x_j)}. \quad (2.12)$$

Die Korrelation zwischen zwei Ergebnissen  $y_1$  und  $y_2$  lässt sich nach der folgenden Formel berechnen:

$$r(y_1, y_2) = \frac{1}{u(y_1) \cdot u(y_2)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i(y_1) \cdot u_j(y_2) \cdot r(x_i, x_j). \quad (2.13)$$

Es ist aber zu beachten, dass aufgrund der Beschränkung der Taylor-Reihenentwicklung auf die linearen Glieder das Standard- oder ISO-GUM-Verfahren nur auf lineare oder linearisierbare Modelle anwendbar ist. Im Falle nichtlinearer Zusammenhänge kann die Monte-Carlo-Simulation benutzt werden (Siebert und Sommer 2004; BIPM 2008b).

#### 2.4.5 Erweiterte Messunsicherheit

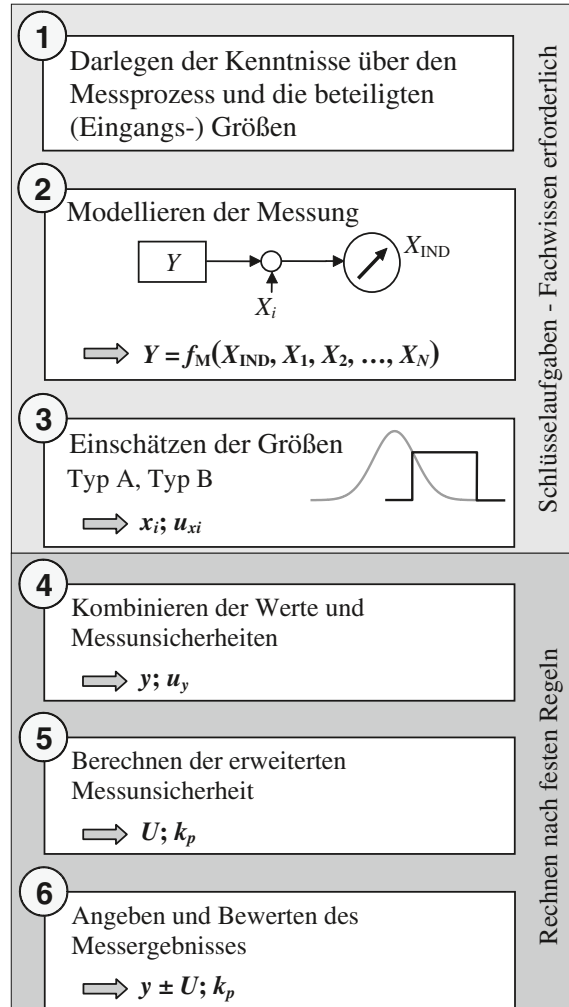
In der Praxis wird für Entscheidungen häufig ein zuverlässiges Intervall für die Messgröße benötigt, welches den richtigen Wert der Messgröße (BIPM 2008a) enthalten soll. Da die Kenntnisse über die Eingangsgrößen durch Wahrscheinlichkeits-Dichteverteilungen beschrieben werden (siehe Abschn. 2.4.2 und 2.4.3), sind auch bzgl. der Ergebnisgröße nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über Intervalle für Messergebnisse möglich und es können die folgenden Fragen gestellt werden: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Wert der Messgröße in einem gegebenen Intervall zu erwarten oder wie lautet ein passendes Intervall zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsaussage?

Die Beantwortung dieser Fragen setzt eigentlich die Kenntnis der PDF der Verteilung der Werte voraus, welche aber bei Anwendung der Gauß'schen Unsicherheitsfortpflanzung nicht gegeben ist. Der Standard-GUM behilft sich hier mit dem *Zentralen Grenzwertsatz* und geht davon aus, dass sich in der Überlagerung der vielfältigen Einflüsse auf ein Messergebnis eine Normalverteilung einstellt (Pólya 1920). In der Praxis hat sich das in vielen Fällen als zutreffend erwiesen, wenn sich nämlich die Unsicherheit aus mehreren ungefähr gleich großen Beiträgen ergibt. In den Fällen, in denen wenige Einflussgrößen von Dominanz sind, wird die PDF des Ergebnisses durch die Faltung dieser dominanten Beiträge bestimmt. Sofern eine genaue Wahrscheinlichkeitsaussage in der Praxis notwendig ist, können in diesen Fällen z. B. Monte-Carlo-Techniken (Siebert und Sommer 2004; BIPM 2008b) benutzt werden, um eine genauere Kenntnis über die PDF des Ergebnisses zu erlangen.

#### 2.4.6 Standard-GUM-Verfahren als schrittweises Verfahren

Das Erstellen einer Messunsicherheitsbilanz nach den Regeln des GUM lässt sich praktisch in sechs Arbeitsschritte gliedern (Sommer und Siebert 2004). Abbildung 2.7 zeigt die Arbeitsschritte in der Übersicht. Die ersten drei Teilaufgaben erfordern Fachwissen über

**Abb. 2.7** Standard-GUM/ISO-GUM-Verfahren in 6 Schritten (Sommer und Siebert 2004)



die spezifische Messung. Nach Abschluss von Schritt 3 liegt eine vollständige mathematische Beschreibung der Messung vor, aus der dann in den folgenden Schritten nach festen Regeln das vollständige Ergebnis berechnet wird.

#### 2.4.6.1 Schritt (1): Darlegen der Kenntnisse über die Messung und die Eingangsgrößen

Ausgegangen wird von den vorhandenen Kenntnissen über den Messprozess und die beteiligten Eingangsgrößen (siehe beispielsweise Abb. 2.4). Als beteiligte Eingangsgrößen seien alle Größen bezeichnet, die das Messergebnis und die zugeordnete Messunsicherheit beeinflussen können.

Kenntnisse können unterschiedlichen Quellen entstammen, es können u. a. sein:

- Ergebnisse vorheriger Messungen;
- Erfahrungswerte, subjektive Bewertungen;
- Werte aus Kalibrier-/Prüfscheinen;
- Herstellerangaben;
- Tabellen-/Literaturwerte.

Die in den Kenntnissen enthaltene nützliche Information ist zu verdichten und ihr quantitativ auswertbarer Gehalt, z. B. Bereichsgrenzen, Schätzwerte, Standardabweichungen, in Tabellen- oder in Listenform festzuhalten.

Zur Messung selbst sind mindestens darzulegen:

- Die Messaufgabe sowie die ursächlichen und die zu messenden Größen, z. B. Bestimmung des Wägewertes eines Gewichtes,
- Das Messprinzip und die Messmethode,
- Die konkrete Ausgestaltung des Messverfahrens, ggf. mithilfe einer Skizze.

#### **2.4.6.2 Schritt (2): Modellieren der Messung (Modell der Auswertung)**

Das Modellieren der Messung ist die schwierigste und zugleich eine der entscheidenden Aufgaben des GUM-Verfahrens. Ziel der Modellbildung ist das Aufstellen des mathematischen Zusammenhangs von Messgröße einerseits und relevanten Eingangsgrößen andererseits, d. h. des sog. Modells der Auswertung (siehe Gl. (2.3)).

Modellbildungsverfahren für die Messunsicherheitsbewertung auf der Basis der Ursache-Wirkungs-Analyse der betrachteten Messung sind bereits von Bachmair (1999), Kessel (2001) und Kind (2001) vorgeschlagen worden. Das hier kurz vorgestellte Verfahren baut darauf auf. Es ist mehrfach ausführlich von (Sommer und Siebert 2006; Sommer et al. 2005) beschrieben worden.

Das Modellbildungsverfahren selbst besteht aus wiederum fünf elementaren Teilaufgaben (Sommer und Siebert 2006; Sommer et al. 2005), die als weitere Untergliederung des in Abb. 2.7 dargestellten GUM-Verfahrens verstanden werden können. Es sind:

- (a) Darlegen der Kenntnisse über die Messung, Identifikation der für die Anzeige/Ausgabe des Messgerätes ursächlichen Größen und der Messgröße(n) sowie Identifikation des Messprinzips, der gewählten Messmethode, z. B. Substitutionsmethode, und Beschreibung des Messverfahrens.
- (b) Dekomposition des Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs gemäß den funktionellen Gruppen/Elementen der Messung und nachfolgend Darstellung des Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs der fiktiven idealen, d. h. ungestörten Messung (siehe Abb. 2.3 und 2.4).
- (c) Einbeziehung aller Unvollkommenheiten, externen Einflüsse und Auswirkungen unvollständig bekannter Parameter in die Ursache-Wirkungs-Darstellung der fiktiven idealen Messung. Diese Einbeziehung erfolgt vorzugsweise in Form von Abweichungen von der o. g. fiktiven ungestörten Messung mittels Korrekturfaktoren in multiplikativer

Darstellung. Damit ergibt sich ein graphischer und mathematischer Zusammenhang für die reale Messung.

(d) Identifikation und Berücksichtigung von Korrelationen:

- Einbeziehung der funktionalen Abhängigkeiten, z. B. Temperaturabhängigkeiten unterschiedlicher Baugruppen/Geräteeinheiten in den Ursache-Wirkungs-Zusammenhang der realen Messung (siehe Schritt (c)), oder
- Berücksichtigung von (geschätzten oder experimentell bestimmten) Korrelationskoeffizienten von zwei oder mehr im gleichen Experiment kalibrierten Normalen bei der Ausführung der Unsicherheitsfortpflanzung (siehe Gl. 2.10 bzw. 2.11).

(e) Invertieren des mathematischen Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs für die reale Messung (siehe Schritt (c)) führt zum mathematischen Modell der Auswertung, z. B.

$$Y = f_M(X_{\text{IND}}, \delta X_{\text{IND}}, \Delta Z_{\text{INSTR}}, \delta Z_{\text{TP}}, \delta Z_{\text{IP}}, \dots), \quad (2.14)$$

Gleichung (2.14) ist eine spezielle Form des allgemeinen mathematischen Modells der Auswertung in Gl. (2.3).

Im Falle sog. *schlecht gestellter mathematischer Probleme* könnte die letztgenannte Umformung zuweilen einige Probleme bereiten; hier sei auf die umfangreiche Literatur zur Behandlung inverser Probleme verwiesen, u. a. (Louis 1998).

Die Aufstellung der Modelle der idealen bzw. der realen Messung kann durch eine graphische Darstellung des Zusammenhangs in Form von Modellbildungskomponenten unterstützt werden.

Wie aus den Abbildungen 2.3 und 2.4 bereits erkennbar ist und auch in der Literatur beschrieben wurde, werden für einfachere Modellbildungsaufgaben nur drei grundlegende Modellbildungskomponenten benötigt (Heidenblut et al. 2007):

<i>Parameterquellen</i> (SRC)	Sie liefern oder reproduzieren eine messbare Größe, i. d. R. die Messgröße
<i>Transformationseinheiten</i> (TRANS)	Sie repräsentieren alle Arten der Signalverarbeitung und -beeinflussung, z. B. Verstärkung, Dämpfung, Digitalisierung etc.
<i>Anzeige-/Ausgabeeinheiten</i> (IND)	Sie zeigen ihre Eingangsgröße(n) an oder geben sie aus

Fast alle Messungen und Kalibrierungen lassen sich auf nur wenige Grundstrukturen von Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen zurückführen, welche im Wesentlichen den angewandten Messmethoden entsprechen.

### 2.4.6.3 Schritt (3): Bewerten der relevanten Eingangsgrößen

Die dritte Teilaufgabe des ISO-GUM-Verfahrens erfordert wie die zweite Teilaufgabe ein profundes Fachwissen sowohl auf dem diesbezüglichen Gebiet der Messtechnik als auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Vorhandene Kenntnisse über Größen, Parameter oder allgemein Variable sind mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu bewerten.



Ziel der quantitativen Einschätzung der wesentlich am Messergebnis beteiligten Größen ist die Zuweisung jeweils eines Erwartungswertes  $x_i = E[X_i]$  und einer diesem zugeordneten Standardunsicherheit (als eine Art „Qualitätsparameter“ für den Schätzwert)  $u(x_i)$  für jede relevante Eingangsgröße  $X_i$ . Je nach Art der vorliegenden Kenntnisse erfolgt die Beschreibung nach Typ A oder Typ B (siehe [Abschn. 2.4.3](#)).

Alle weiteren Teilaufgaben des ISO-GUM-Verfahrens (GUM 1995) folgen festen mathematischen Regeln und können daher rechnergestützt unter Verwendung einer entsprechend programmierten Software, z. B. der GUM-Workbench (<http://www.metrodata.de>), ausgeführt werden. Ein Beispiel ist in [Abschn. 2.5](#) gegeben.

#### 2.4.6.4 Schritt (4): Kombinieren der Erwartungswerte und der Standardunsicherheiten

Ziel der vierten Teilaufgabe ist es, den Erwartungswert  $y$  der Messgröße  $Y$  und die beizuordnende Standardunsicherheit  $u(y)$  zu berechnen. Die Berechnung des Erwartungswertes für die Ausgangsgröße erfolgt gemäß Gl. (2.3). Die Gauß'sche Unsicherheitsfortpflanzung ist als Gl. (2.10) in [Abschn. 2.4.4](#) angegeben. Die Lösung beider Gleichungen setzt die Kenntnis der Modellgleichung (2.14) aus Schritt (2) voraus.

Im Falle korrelierter Größen sind für die Korrelationskoeffizienten entweder Erfahrungswerte zu verwenden oder er ist mittels statistischer Analyse aus Experimenten zu bestimmen (GUM 1995). Korrelationen können insbesondere dann vernachlässigt werden, wenn bekannt ist, dass sie nur schwach ausgeprägt sind (Korrelationskoeffizient kleiner 0,1) oder die korrelierten Unsicherheitsbeiträge nur einen geringen Einfluss auf die Gesamtmessunsicherheit besitzen (kleiner 10 % der gesamten Messunsicherheit des Ergebnisses), mithin also nicht dominieren. Sind die funktionalen Zusammenhänge der korrelierten Größen bekannt, so ist es oft möglich, sie in die Modellgleichung „einzubauen“, womit sie praktisch „aufgelöst“ werden.

#### 2.4.6.5 Schritt (5): Bestimmen der erweiterten Messunsicherheit

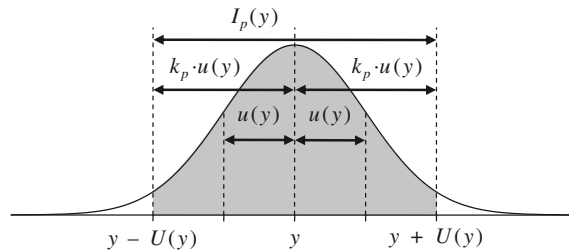
Die sog. erweiterte Messunsicherheit ist definiert als die Halbweite eines Intervalls,

$$I_p(y) = [y - U(y); y + U(y)], \quad (2.15)$$

das mit einer Überdeckungswahrscheinlichkeit von mindestens  $p = 95\%$  den überwiegenden Anteil der Werte enthält, die aufgrund der vorhandenen Kenntnisse dem Messergebnis vernünftigerweise zugeordnet werden können (GUM 1995). [Abbildung 2.8](#) illustriert das solchermaßen beschriebene Intervall. Die erweiterte Messunsicherheit  $U(y)$  wird durch Multiplikation der zugehörigen (kombinierten) Standardmessunsicherheit  $u(y)$  mit einem Erweiterungsfaktor  $k_p$  berechnet. Dabei ist unter Berücksichtigung der Art der Verteilung der Werte (Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung PDF), die der Ergebnisgröße zugeordnet werden können, der Erweiterungsfaktor so zu wählen, dass mit dem o. g. Intervall  $I_p(y)$  stets eine Überdeckungswahrscheinlichkeit von z. B.  $p \geq 95\%$  assoziiert wird:

$$U(y) = u(y) \cdot k_p. \quad (2.16)$$

**Abb. 2.8** Illustration der erweiterten Messunsicherheit als Werteintervall. Symbole siehe Text



#### 2.4.6.6 Schritt (6): Angeben und Bewerten des vollständigen Messergebnisses und des Unsicherheitsbudgets

Ein Messergebnis ist nur dann vollständig, wenn es auch eine Messunsicherheitsangabe und ein Messunsicherheitsbudget enthält, womit der Nachweis der kompetenten Erbringung des Ergebnisses geführt wird. Die Messunsicherheitsbilanz ergibt sich zwangsläufig aus der konsequenten Anwendung des ISO-GUM-Verfahrens (GUM 1995); das Budget liefert alle erforderlichen Informationen zur Bewertung und Verbesserung des analysierten Messprozesses. Die sog. Messunsicherheitsbilanz (siehe Tab. 2.3, 2.4, 2.6 oder 2.7) soll spaltenweise mindestens folgende Angaben enthalten:

- Bezeichnung der Größen  $X_i$ , z. B. Umgebungstemperatur;
- Erwartungswerte der Größen,  $x_i = E[X_i]$ ;
- die beizuordnenden Standardunsicherheiten,  $u(x_i) = \sqrt{\text{Var}[X_i]}$ ;
- die Empfindlichkeitskoeffizienten,  $c_i = \partial f / \partial X_i$ ;
- sowie als entscheidende Werte zur Bewertung der dominierenden Ursachen zur Gesamt-Messunsicherheit die Messunsicherheitsbeiträge zu den relevanten Eingangsgrößen,  $u_i(y) = c_i \cdot u(x_i)$ .

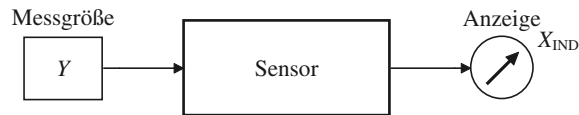
Optional können außerdem folgende Angaben gemacht werden:

- relevante, verdichtete Kenntnisse über die Größen, z. B. das Intervall, welches die Werte der Größe annehmen können;
- die den Größen aufgrund der vorliegenden Kenntnisse zuzuordnenden Verteilungen (PDF);
- der Beitragskoeffizient,  $h_i = u_i(y)^2 / u(y)^2$ , der sich zu eins addiert und alternativ zur Bewertung der dominierenden Quellen für die Messunsicherheit verwendet werden kann.

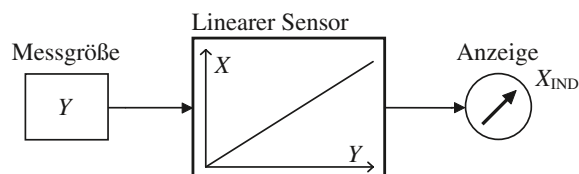
## 2.5 Ermittlung der Messunsicherheit bei Messungen mit Sensoren

Beim Messen mit Sensoren findet generell das Ursache-Wirkungsschema in Abb. 2.9 Anwendung. Eine Messgröße wirkt auf den Sensor und dieser erzeugt ein von der Messgröße abhängiges Signal bzw. eine Anzeige.

Ist das Übertragungsverhalten eines Sensors bekannt (kalibrierter Sensor), so kann vom Ausgangssignal bzw. der Anzeige auf den Wert der Messgröße geschlossen werden.



**Abb. 2.9** Ursache-Wirkungs-Schema bei Messungen mit Sensoren



**Abb. 2.10** Ursache-Wirkungs-Schema bei einem linearen Sensor

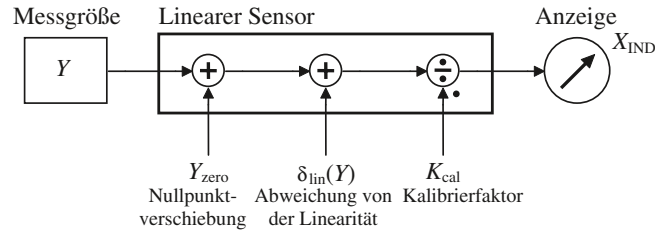
### 2.5.1 Kalibrierung von linearen Sensoren

Wenn das Ausgangssignal des Sensors (Anzeige  $X_{\text{IND}}$ ) eine lineare Funktion (Kennlinie) der Messgröße  $Y$  ist, wird er als *linearer Sensor* bezeichnet. Das entsprechende Ursache-Wirkungs-Schema ist in Abb. 2.10 dargestellt. Die Realisierung von exakt linearen Sensoren ist in der Praxis schwierig, bzw. ist es nicht möglich, die exakte Linearität nachzuweisen. Man wird deshalb nie wissen, ob die Kennlinie eines realen Sensors wirklich exakt linear ist. Ein realer Sensor wird daher als linear angesehen, wenn die Abweichung der realisierten Kennlinie von einer linearen Kennlinie kleiner als ein vorgegebener Grenzwert ist; dieser wird *Grenzwert für die Abweichung von der Linearität* genannt.

Wenn der *Grenzwert für die Abweichung von der Linearität* sehr groß ist, kann fast jeder Sensor als linear betrachtet werden. Daher hat die Festlegung dieses Grenzwertes Einfluss auf die Qualität der Messergebnisse, die mit dem Sensor erzielt werden können. Dieser Grenzwert hat deshalb auch Einfluss auf die entsprechende mit den Ergebnissen einhergehende Messunsicherheit. Einzelheiten dazu werden in [Abschn. 2.5.1.1](#) erörtert.

Ist bei einem linearen Sensor bei einer Eingangsgröße von null die Ausgangsgröße des Geräts gleich null, dann bezeichnet man diesen Sensor als nullpunktjustierten linearen Sensor. In diesem Fall ist die Anzeige (oder Ausgangsgröße)  $X_{\text{IND}}$  des Sensors proportional zur Eingangsgröße  $Y$ .

Wird der Sensor verwendet, um einen unbekanntem Wert der Messgröße  $Y_i$  zu bestimmen, wird das Ausgangssignal bzw. die Anzeige  $X_{\text{IND},i}$  beobachtet und daraus das Messergebnis berechnet. (Hinweis: Wenn mehrere Werte für die gleiche Größe (Ermittlungsmethode A) beobachtet werden, kann  $X_{\text{IND},i}$  von einer Reihe von Werten abgeleitet sein).



**Abb. 2.11** Ursache-Wirkungs-Schema eines linearen Messgeräts mit einer Abweichung von der Linearität

Wir benötigen eine Funktion, um einen Schätzwert für den Wert der Messgröße  $Y_i$  auf der Grundlage der bekannten Anzeige  $X_{\text{IND},i}$  unter Verwendung des Umkehrwerts der Sensorantwort zu errechnen. Wenn die Antwort linear und nullpunktjustiert ist, ist der Umkehrwert der Antwort ebenfalls linear und nullpunktjustiert und die Messfunktion lautet:

$$Y_i = K_{\text{cal}} \cdot X_{\text{IND},i}, \quad (2.17)$$

wobei  $K_{\text{cal}}$  der Kalibrierfaktor ist. Im Allgemeinen lautet die Messfunktion für einen linearen Sensor

$$Y_i = K_{\text{cal}} \cdot X_{\text{IND},i} - Y_{\text{zero}}, \quad (2.18)$$

wobei  $Y_{\text{zero}}$  das Negative des Wertes der Messgröße  $Y$  ist, der eine Nullanzeige oder ein Nullsignal erzeugt.

Häufig wird z. B. eine lineare Regression angewandt (Coleman und Steele 1999; NIST/SEMATECH 2010; Draper und Smith 1981), um einen linearen Sensor zu kalibrieren und die entsprechenden Werte für  $K_{\text{cal}}$  und  $Y_{\text{zero}}$  zu finden.

### 2.5.1.1 Abweichung von der Linearität

Oft wird ein Chi-Quadrat-Test verwendet, um die Qualität der Anpassung an ein Regressionsmodell (Fornasini 2008) zu prüfen. Mit dem Chi-Quadrat-Test wird geprüft, ob die Daten mit dem statistischen Modell übereinstimmen. Wenn die Wiederholbarkeit des Sensors sehr gut ist, ist aber ein statistisches Modell nicht sinnvoll, da die Abweichungen von der Linearität in diesem Fall größtenteils deterministisch sind.

Wir verwenden eine zusätzliche Größe  $\delta_{\text{lin}}(Y)$  im Modell, um die Abweichung von der Linearität zu berücksichtigen. Abbildung 2.11 zeigt das Ursache-Wirkungs-Schema eines linearen Messgeräts einschließlich  $\delta_{\text{lin}}(Y)$ . Der tatsächliche Wert von  $\delta_{\text{lin}}(Y)$  hängt vom Messwert  $Y$  ab.

Aus dem Ursache-Wirkungs-Schema in Abb. 2.11 können wir das folgende Messmodell ableiten:

$$\frac{Y + Y_{\text{zero}} + \delta_{\text{lin}}(Y)}{K_{\text{cal}}} = X_{\text{IND}}. \quad (2.19)$$

Hierbei ist  $Y_{\text{zero}}$  die Nullpunktverschiebung,  $\delta_{\text{lin}}(Y)$  die Abweichung von der Linearität und  $K_{\text{cal}}$  der Kalibrierfaktor.

Wir können das Messmodell (2.19) verwenden, um die Messfunktion für einen unbekanntem Wert der Messgröße  $Y_i$  abzuleiten:

$$Y_i = X_{\text{IND},i} \cdot K_{\text{cal}} - \delta_{\text{lin}}(Y)_i - Y_{\text{zero}}. \quad (2.20)$$

In der Praxis ist der exakte Wert von  $\delta_{\text{lin}}(Y)_i$  unbekannt. Es sollte jedoch immer möglich sein, eine Obergrenze  $\varepsilon_{\text{lin}}$  für einen Bereich festzulegen, der die Abweichung von der Linearität einschließt, so dass

$$|\delta_{\text{lin}}(Y)_i| < \varepsilon_{\text{lin}} \quad \text{für alle } i \text{ ist.} \quad (2.21)$$

In solchen Fällen kann der Grenzwert  $\varepsilon_{\text{lin}}$  z. B. unter Verwendung einer Rechteckverteilung als Messunsicherheit ausgedrückt werden.

### 2.5.1.2 Zweipunktkalibrierung

Für die Kalibrierung eines Sensors wird der Sensor mit einer bekannten Messgröße  $Y_{\text{cal},i}$  beaufschlagt und das Ausgangssignal bzw. die Anzeige  $X_{\text{cal},i}$  ermittelt. Das Paar  $(X_{\text{cal},i}, Y_{\text{cal},i})$  wird als Kalibrierpunkt bezeichnet. Wie in (Kessel et al. 2012) gezeigt wurde, werden die durch eine lineare Regression ermittelten Werte für die Steigung und den Nullpunkt meist von den beiden äußersten Kalibrierpunkten bestimmt. Daher verwenden wir eine einfache Zweipunktkalibrierung, um den Kalibrierfaktor  $K_{\text{cal}}$  und die Nullpunktverschiebung  $Y_{\text{zero}}$  zu ermitteln.

Wir verwenden für die Berechnung die beiden äußeren Punkte. Der erste Punkt  $(X_{\text{cal},l}, Y_{\text{cal},l})$  ist oft der Ursprung. Der zweite Punkt  $(X_{\text{cal},u}, Y_{\text{cal},u})$  wird normalerweise in der Nähe des Bereichsendes gewählt, um den Einfluss auf die Unsicherheit von  $K_{\text{cal}}$  zu minimieren. Da die beiden Punkte den Anstieg der Antwort des linearen Messgeräts definieren, beträgt der Wert von  $\delta_{\text{lin}}(Y)$  für diese Punkte null. Bei Verwendung des Messmodells aus Gl. (2.19) und seiner Anwendung auf beide Kalibrierpunkte erhalten wir:

$$K_{\text{cal}} = \frac{Y_{\text{cal},u} - Y_{\text{cal},l}}{X_{\text{cal},u} - X_{\text{cal},l}} \quad \text{und} \quad Y_{\text{zero}} = K_{\text{cal}} \cdot X_{\text{cal},l} - Y_{\text{cal},l}. \quad (2.22)$$

Wenn die Unsicherheit der Kalibrierpunkte nicht vom Rauschen (zufällige Schwankung), sondern von systematischen Effekten dominiert wird, ist eine lineare Regressionsanalyse nicht zweckdienlich. Eine Zweipunktkalibrierung, zusammen mit einem zusätzlichen Term zur Berücksichtigung der möglichen Abweichung von der Linearität, ist in solchen Fällen effizienter.

### 2.5.1.3 Eingeschränkte Auflösung

Messgeräte und Sensoren haben immer eine begrenzte Auflösung. Da heutzutage in einige Sensoren eine digitale Verarbeitung integriert ist, und der Anteil dieser Art von Sensoren in Zukunft noch zunehmen wird, wollen wir diesen Fall hier erörtern. Die digitale Wandlung analoger Signale führt mathematisch zu einer Rundung der analogen Werte. Abbildung 2.12 zeigt das Ursache-Wirkungs-Schema eines linearen Sensors mit einer Abweichung von der Linearität und einer eingeschränkten Auflösung durch Digitalisierung.