

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Logik, Mengen, Zahlensysteme</b>	<b>21</b>
1.1	Aussagenlogik	21
1.1.1	Allgemeines	21
1.1.2	Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen	23
1.1.3	BOOLEsche Algebra	25
1.1.4	Normalformen	27
1.2	Prädikatenlogik	29
1.3	Mengen	30
1.3.1	Allgemeines	30
1.3.2	Mengenoperationen	33
1.3.3	Beziehungen, Gesetze, Rechenregeln	35
1.3.4	Relationen	36
1.3.5	Intervalle	38
1.3.6	Unscharfe Mengen	38
1.4	Zahlensysteme	40
1.4.1	Polyadische Zahlensysteme	40
1.4.2	Römisches Zahlensystem	45
<b>2</b>	<b>Arithmetik</b>	<b>46</b>
2.1	Menge der reellen Zahlen	46
2.1.1	Standard-Zahlenmengen	46
2.1.2	Grundoperationen an reellen Zahlen	48
2.1.2.1	Die vier Grundrechenarten	48
2.1.2.2	Proportionen, Verhältnisgleichungen	52
2.1.2.3	Prozentrechnung	53
2.1.2.4	Näherung	54
2.1.2.5	Fehlerrechnung	55
2.1.2.6	Betrag und Signum	56
2.1.2.7	Summen- und Produktzeichen	57
2.1.3	Potenzen und Wurzeln	59
2.1.4	Logarithmen	61
2.1.5	Fakultät und Binomialkoeffizient	63
2.2	Menge der komplexen Zahlen	66
2.2.1	Grundbegriffe	66
2.2.2	Darstellungsformen komplexer Zahlen	69
2.2.3	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	70
2.2.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	71
2.2.5	Natürliche Logarithmen komplexer Zahlen	73
2.3	Kombinatorik	74
2.3.1	Permutationen	74

2.3.2	Variationen . . . . .	76
2.3.3	Kombinationen . . . . .	77
2.4	Folgen . . . . .	79
2.4.1	Allgemeines . . . . .	79
2.4.2	Schranken, Grenzen, Grenzwert einer Folge . . . . .	80
2.4.3	Arithmetische und geometrische Folgen . . . . .	83
2.4.4	Finanzmathematik . . . . .	86
2.4.4.1	Zinsrechnung . . . . .	86
2.4.4.2	Zinseszinsrechnung . . . . .	87
2.4.4.3	Rentenrechnung . . . . .	88
2.4.4.4	Schuldentilgung, Annuität . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Gleichungen und Ungleichungen . . . . .</b>	<b>91</b>
3.1	Allgemeines . . . . .	91
3.2	Lineare algebraische Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	96
3.2.1	Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen . . . . .	96
3.2.2	Lineare Gleichungen und Ungleichungen mit mehreren Variablen . . . . .	98
3.3	Nichtlineare Gleichungen . . . . .	101
3.3.1	Nichtlineare algebraische Gleichungen . . . . .	101
3.3.1.1	Quadratische Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen . . . . .	101
3.3.1.2	Quadratisches Gleichungssystem mit zwei Variablen . . . . .	103
3.3.1.3	Kubische Gleichungen . . . . .	104
3.3.1.4	Gleichungen 4. Grades . . . . .	106
3.3.1.5	Symmetrische Gleichungen . . . . .	106
3.3.1.6	Algebraische Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	107
3.3.1.7	HORNER-Schema . . . . .	108
3.3.1.8	Wurzelgleichungen mit einer Variablen . . . . .	111
3.3.2	Transzendente Gleichungen . . . . .	111
3.3.2.1	Exponentialgleichungen . . . . .	111
3.3.2.2	Logarithmische Gleichungen . . . . .	112
3.3.2.3	Goniometrische Gleichungen . . . . .	113
3.3.2.4	Betragsgleichungen und -ungleichungen . . . . .	114
3.4	Numerische Verfahren . . . . .	114
3.4.1	Bisektionsverfahren . . . . .	115
3.4.2	Fixpunktiteration . . . . .	116
3.4.3	NEWTONSches (Tangenten-)Näherungsverfahren . . . . .	118
3.4.4	Sekantenmethode (Regula falsi) . . . . .	119
3.5	Nichtlineare Gleichungssysteme . . . . .	120
3.6	Grafische Lösung von Gleichungen . . . . .	123

<b>4</b>	<b>Elementare Geometrie</b>	<b>124</b>
4.1	Planimetrie, ebene Trigonometrie	124
4.1.1	Winkel	124
4.1.2	Teilungen, Ähnlichkeit, Kongruenz, Symmetrie	126
4.1.3	Dreieck	129
4.1.3.1	Schiefwinkliges Dreieck	130
4.1.3.2	Gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck	135
4.1.3.3	Rechtwinkliges Dreieck	136
4.1.4	Vierecke	138
4.1.4.1	Trapez	138
4.1.4.2	Parallelogramme	139
4.1.4.3	Unregelmäßige Vierecke mit Umkreis bzw. Inkreis	140
4.1.5	Vielecke (Polygone)	141
4.1.5.1	Ebene sternförmige $n$ -Ecke	141
4.1.5.2	Regelmäßige (reguläre) Vielecke	141
4.1.5.3	Einige bestimmte regelmäßige Vielecke	142
4.1.5.4	Konstruktion der einfachen regelmäßigen Vielecke	143
4.1.6	Der Kreis	144
4.1.6.1	Sätze zum Kreis	144
4.1.6.2	Kreisberechnungen	145
4.2	Geometrische Körper (Stereometrie)	147
4.2.1	Allgemeines	147
4.2.2	Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder, Vielfläche)	149
4.2.2.1	Prismatische Körper	149
4.2.2.2	Pyramide, Pyramidenstumpf	150
4.2.2.3	Prismoid	151
4.2.2.4	Die fünf regelmäßigen Polyeder	152
4.2.3	Krummflächig begrenzte Körper	154
4.2.3.1	Zylinder, Zylinderabschnitt	154
4.2.3.2	Kegel, Kegelstumpf	155
4.2.3.3	Kugel	156
4.2.3.4	Tonne, Torus	158
4.2.3.5	Fraktale Geometrie	158
4.3	Sphärische Trigonometrie	160
4.3.1	Allgemeines	160
4.3.2	Rechtwinkliges sphärisches Dreieck	161
4.3.3	Schiefwinkliges sphärisches Dreieck	162
4.3.4	Berechnung sphärischer Dreiecke	164
4.3.5	Mathematische Geografie	165
<b>5</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>168</b>
5.1	Vektorraum	168

5.2	Matrizen . . . . .	172
5.2.1	Matrizenarten, Definitionen . . . . .	172
5.2.1.1	Allgemeines . . . . .	172
5.2.1.2	Quadratische Matrizen . . . . .	174
5.2.1.3	Inverse Matrix, (Um)kehrmatrix $A^{-1}$ . . . . .	180
5.2.1.4	Rang einer Matrix . . . . .	181
5.2.1.5	Matrizennormen . . . . .	182
5.2.1.6	Grenzwert, Differenzialquotient, Integral . . . . .	183
5.2.2	Matrizengesetze . . . . .	183
5.2.2.1	Gleichheit und Summe zweier Matrizen . . . . .	183
5.2.2.2	Multiplikation von Matrizen . . . . .	183
5.2.3	Matrizengleichungen . . . . .	186
5.2.4	Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen . . . . .	187
5.2.5	Numerische Verfahren . . . . .	190
5.2.5.1	HOUSEHOLDER-Orthogonalisierung (-Transformation) . . . . .	190
5.2.5.2	QR-Verfahren . . . . .	192
5.2.5.3	Vektoriteration (Potenzmethode, v.-MISES- Verfahren) . . . . .	192
5.3	Determinanten . . . . .	193
5.3.1	Determinante einer quadratischen Matrix . . . . .	193
5.3.2	Berechnung von Determinanten . . . . .	194
5.3.3	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	196
5.3.4	Praktische Berechnung einer Determinante . . . . .	197
5.4	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	198
5.4.1	Allgemeines . . . . .	198
5.4.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme . . . . .	199
5.4.3	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme . . . . .	201
5.4.3.1	Einfacher und verketteter GAUSSscher Algorithmus . . . . .	202
5.4.3.2	GAUSSscher Algorithmus für Systeme mit gleicher Matrix $A$ und $m$ rechten Seiten . . . . .	206
5.4.3.3	GAUSS-JORDAN-Verfahren zur Matrixinversion . . . . .	207
5.4.3.4	GAUSSscher Algorithmus für symmetrische, positiv definite Koeffizientenmatrix, CHOLE- SKY-Verfahren . . . . .	208
5.4.3.5	Gleichungssysteme mit symmetrischer, tridiagonaler, positiv definiter Matrix . . . . .	209
5.4.3.6	GAUSS-SEIDELsches Iterationsverfahren . . . . .	209
5.4.3.7	Austauschverfahren . . . . .	213
5.4.4	CRAMERSche Regel . . . . .	213
5.4.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme . . . . .	214
5.5	Lineare Optimierung . . . . .	216
5.5.1	Allgemeines . . . . .	216

5.5.2	Grafische Lösung für zwei Variable	218
5.5.3	Simplexalgorithmus	219
5.6	Abbildungen	223
5.6.1	Lineare Abbildungen	223
5.6.2	Affine Abbildungen	226
5.6.2.1	Allgemeines	226
5.6.2.2	Allgemeine, nicht winkeltreue affine Abbildungen	231
5.6.2.3	Ähnlichkeitsabbildungen	234
5.6.2.4	Kongruenzabbildungen	235
5.7	Koordinatentransformation	238
5.7.1	Allgemeines	238
5.7.2	Orthogonale Koordinatentransformation in der Ebene	239
5.7.3	Orthogonale Koordinatentransformation im Raum	240
<b>6</b>	<b>Vektoren, Analytische Geometrie</b>	<b>244</b>
6.1	Vektoren, Grundlagen	244
6.2	Vektoralgebra	249
6.2.1	Addition und Subtraktion von Vektoren	249
6.2.2	Multiplikation von Vektoren	251
6.2.2.1	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	251
6.2.2.2	Skalarprodukt (inneres Produkt, Punktprodukt)	251
6.2.2.3	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzpro- dukt)	253
6.2.2.4	Mehrfache Produkte von Vektoren	255
6.3	Koordinatensysteme	256
6.3.1	Allgemeines	256
6.3.2	Ebene (2D-)Koordinatensysteme	257
6.3.3	Räumliche (3D-)Koordinatensysteme	258
6.4	Punkte, Kurven 1. Ordnung	261
6.4.1	Punkte	261
6.4.2	Gerade, Strahl, Strecke	262
6.4.2.1	Punktmengen, Teilung einer Strecke	262
6.4.2.2	Gleichungen einer Geraden in der ( $x, y$ )-Ebene	264
6.4.2.3	Gleichungen einer Geraden im Raum	266
6.4.2.4	Abstand eines Punktes von einer Geraden	269
6.4.3	Mehrere Geraden	270
6.4.3.1	Schnittpunkt zweier Geraden	270
6.4.3.2	Schnittwinkel zweier Geraden	272
6.4.3.3	Abstand zweier Geraden	274
6.4.3.4	Drei und mehr Geraden	275
6.5	Ebenen	275
6.5.1	Eine Ebene	276
6.5.1.1	Gleichungen einer Ebene im Raum	276

	6.5.1.2	Richtungskosinus der Normalen einer Ebene . . . . .	280
	6.5.1.3	Abstand eines Punktes $P_1$ von einer Ebene . . . . .	280
	6.5.1.4	Durchstoßpunkt $D$ einer Geraden durch eine Ebene . . . . .	281
	6.5.1.5	Winkel $\varphi$ zwischen Gerade und Ebene . . . . .	282
	6.5.2	Zwei Ebenen . . . . .	283
	6.5.3	Drei und mehr Ebenen . . . . .	284
	6.5.4	Flächeninhalt, Schwerpunkt, Volumen . . . . .	285
6.6		Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte) . . . . .	286
	6.6.1	Allgemeines . . . . .	286
	6.6.2	Kreis . . . . .	288
	6.6.2.1	Gleichungen des Kreises . . . . .	288
	6.6.2.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis . . . . .	290
	6.6.2.3	Tangente und Normale eines Kreises . . . . .	291
	6.6.2.4	Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis . . . . .	291
	6.6.2.5	Potenz $p$ eines Punktes in Bezug auf einen Kreis . . . . .	292
	6.6.2.6	Kreisbüschel . . . . .	293
	6.6.3	Ellipse . . . . .	293
	6.6.3.1	Gleichungen der Ellipse . . . . .	293
	6.6.3.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse . . . . .	295
	6.6.3.3	Tangente, Normale und Durchmesser einer Ellipse . . . . .	296
	6.6.3.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Ellipse . . . . .	297
	6.6.3.5	Krümmung einer Ellipse . . . . .	297
	6.6.3.6	Haupt- und Nebenkreis einer Ellipse . . . . .	298
	6.6.3.7	Flächeninhalt und Umfang von Ellipse, Ellipsensegment und Ellipsensektor . . . . .	298
	6.6.3.8	Ellipsenkonstruktionen . . . . .	299
	6.6.4	Parabel . . . . .	301
	6.6.4.1	Gleichungen der Parabel . . . . .	301
	6.6.4.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel . . . . .	303
	6.6.4.3	Tangente und Normale einer Parabel . . . . .	304
	6.6.4.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Parabel . . . . .	304
	6.6.4.5	Krümmung einer Parabel . . . . .	305
	6.6.4.6	Parabelsegment, Parabelbogen, Brennstrahl . . . . .	305
	6.6.4.7	Parabelkonstruktionen . . . . .	306
	6.6.5	Hyperbel . . . . .	307
	6.6.5.1	Gleichungen der Hyperbel . . . . .	308
	6.6.5.2	Schnittpunkt einer Geraden mit einer Hyperbel . . . . .	310
	6.6.5.3	Tangente und Normale einer Hyperbel . . . . .	311
	6.6.5.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Hyperbel . . . . .	312

	6.6.5.5	Krümmung einer Hyperbel . . . . .	313	
	6.6.5.6	Hyperbelsegment und Hyperbelsektor . . . . .	314	
	6.6.5.7	Hyperbelkonstruktionen . . . . .	314	
6.7		Flächen 2. Ordnung . . . . .	316	
	6.7.1	Allgemeines . . . . .	316	
	6.7.2	Kugel . . . . .	317	
	6.7.3	Ellipsoid . . . . .	318	
	6.7.4	Hyperboloid . . . . .	319	
	6.7.5	Kegel . . . . .	321	
	6.7.6	Zylinder . . . . .	322	
	6.7.7	Paraboloid . . . . .	323	
6.8		Hauptachsentransformation . . . . .	325	
<b>7</b>		<b>Funktionen und Kurven . . . . .</b>	<b>334</b>	
	7.1	Allgemeines . . . . .	334	
		7.1.1 Funktionen mit einer unabhängigen Variablen . . . . .	334	
		7.1.2 Funktionen mit mehreren Variablen . . . . .	338	
	7.2	Rationale Operationen mit Funktionen . . . . .	340	
	7.3	Grenzwerte, unbestimmte Ausdrücke . . . . .	341	
		7.3.1 Grenzwert einer Funktion . . . . .	341	
		7.3.2 Unbestimmte Ausdrücke . . . . .	344	
	7.4	Eigenschaften reeller Funktionen . . . . .	346	
		7.4.1 Ausgewählte Eigenschaften . . . . .	346	
		7.4.2 Nullstellen einer Funktion . . . . .	349	
		7.4.3 Stetigkeit einer Funktion . . . . .	350	
	7.5	Ausgewählte Funktionen . . . . .	353	
	7.6	Rationale Funktionen . . . . .	355	
		7.6.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome) . . . . .	355	
		7.6.2 Interpolation . . . . .	358	
			7.6.2.1 Allgemeines . . . . .	358
			7.6.2.2 Interpolationsformel von LAGRANGE . . . . .	359
			7.6.2.3 Interpolationsformel von NEWTON . . . . .	360
			7.6.2.4 Interpolation durch kubische Splines . . . . .	362
		7.6.3 Gebrochenrationale Funktionen . . . . .	365	
	7.7	Nichtrationale Funktionen . . . . .	367	
		7.7.1 Allgemeine Potenzfunktionen . . . . .	367	
		7.7.2 Exponentialfunktionen . . . . .	368	
		7.7.3 Logarithmusfunktionen . . . . .	371	
		7.7.4 Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen . . . . .	372	
			7.7.4.1 Allgemeines . . . . .	372
			7.7.4.2 Goniometrische Beziehungen . . . . .	376
			7.7.4.3 Allgemeine Sinusfunktion (harmonische Schwingung) . . . . .	380
			7.7.4.4 Modulation . . . . .	381

7.7.4.5	Überlagerung (Superposition) von Schwingungen	383
7.7.4.6	Komplexe Zeigerdarstellung von Sinusgrößen	387
7.7.5	Zyklometrische Funktionen, Arkusfunktionen	389
7.7.6	Hyperbelfunktionen	393
7.7.7	Areafunktionen	398
7.8	Algebraische Kurven höherer Ordnung	400
7.8.1	Kurven 3. Ordnung	401
7.8.2	Kurven 4. Ordnung	402
7.9	Zykloiden (Rollkurven)	404
7.9.1	Gewöhnliche (gespitzte) Zykloide	404
7.9.2	Epizykloiden	405
7.9.3	Hypozykloiden	407
7.10	Spirallinien	409
7.10.1	Logarithmische Spirale	409
7.10.2	ARCHIMEDische Spirale	410
7.10.3	Hyperbolische Spirale	410
7.11	Weitere ebene Kurven	411
7.11.1	Kettenlinie	411
7.11.2	Traktrix	412
7.12	Komplexe Funktionen	412
7.12.1	Allgemeines	412
7.12.2	Konforme Abbildungen	415
7.12.2.1	Lineare und quadratische konforme Abbildungen	415
7.12.2.2	MÖBIUS-Abbildung und Inversion	416
<b>8</b>	<b>Differenzialrechnung</b>	<b>420</b>
8.1	Funktionen einer Variablen	420
8.1.1	Allgemeines	420
8.1.2	Erste Ableitungen der elementaren Funktionen	422
8.1.3	Differenziationsregeln, Ableitungsregeln	423
8.1.3.1	Grundregeln	423
8.1.3.2	Höhere Ableitungen und Differenziale	425
8.1.3.3	Differenziation impliziter Funktionen $F(x, y) = 0$	426
8.1.3.4	Differenziation von Funktionen in Parameterform	427
8.1.3.5	Differenziation von Funktionen in Polarkoordinaten	427
8.1.4	Grafische Differenziation	428
8.1.5	Numerische Differenziation	428
8.1.6	Logarithmische Differenziation	429
8.1.7	Mittelwertsätze	430



8.2	Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	431
8.2.1	Partielle Ableitung 1. Ordnung . . . . .	431
8.2.2	Höhere partielle Ableitungen . . . . .	432
8.2.3	Totale Ableitungen für zwei Variable . . . . .	433
8.3	Anwendungen . . . . .	435
8.3.1	Monotonie und Krümmungsverhalten . . . . .	435
8.3.2	Extrema von Funktionen einer Variablen . . . . .	439
8.3.3	Wendepunkte und singuläre Punkte . . . . .	443
8.3.4	Asymptoten . . . . .	445
8.3.5	Hüllkurven . . . . .	446
8.3.6	Kurvendiskussion . . . . .	447
8.3.7	Extrema von Funktionen mehrerer Variablen . . . . .	447
8.4	Differenzialgeometrie . . . . .	450
8.4.1	Ebene Kurven . . . . .	450
8.4.1.1	Bogenelement einer ebenen Kurve . . . . .	450
8.4.1.2	Tangente und Normale einer ebenen Kurve . . . . .	450
8.4.1.3	Zwei ebene Kurven . . . . .	452
8.4.2	Raumkurven . . . . .	453
8.4.2.1	Darstellungen im kartesischen Koordinaten- system . . . . .	453
8.4.2.2	Bogenelement einer Raumkurve . . . . .	453
8.4.2.3	Tangente und Normale einer Raumkurve . . . . .	453
8.4.2.4	Krümmung einer Raumkurve . . . . .	457
8.4.2.5	Windung (Torsion) einer Raumkurve . . . . .	458
8.4.3	Flächen im Raum . . . . .	459
<b>9</b>	<b>Integralrechnung . . . . .</b>	<b>466</b>
9.1	Allgemeines . . . . .	466
9.1.1	Unbestimmtes Integral . . . . .	466
9.1.2	Bestimmtes Integral (RIEMANN'Sches Integral) . . . . .	467
9.1.3	Uneigentliche Integrale . . . . .	470
9.2	Grundintegrale, Stammintegrale . . . . .	472
9.3	Integrationsregeln und -verfahren . . . . .	473
9.3.1	Grundregeln der Integralrechnung . . . . .	473
9.3.2	Integration durch Substitution . . . . .	473
9.3.3	Partielle Integration (Produktintegration) . . . . .	477
9.3.4	Integration nach Partialbruchzerlegung . . . . .	477
9.3.5	Integration nach Reihenentwicklung . . . . .	480
9.3.6	Grafische Integration . . . . .	482
9.4	Numerische Integration . . . . .	483
9.4.1	Allgemeines . . . . .	483
9.4.2	NEWTON-COTES-Formeln . . . . .	484
9.4.2.1	Rechteckformel . . . . .	486
9.4.2.2	Sehnentrapezformel . . . . .	487

9.4.2.3	SIMPSONSche Formel, KEPLERSche Fassformel . . . . .	487
9.4.2.4	NEWTONSche 3/8-Formel . . . . .	488
9.4.2.5	Tangententrapezformel . . . . .	489
9.4.3	GAUSSSches Quadraturverfahren . . . . .	490
9.4.4	ROMBERG-Quadraturverfahren . . . . .	491
9.5	Bereichsintegrale, Gebietsintegrale . . . . .	493
9.5.1	Zweidimensionales Bereichsintegral, Doppelintegral . . .	493
9.5.2	Raumintegral, Volumenintegral, Dreifachintegral . . . . .	496
9.6	Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	498
9.6.1	Geometrische Anwendungen . . . . .	498
9.6.1.1	Flächeninhalte (Quadratur) . . . . .	498
9.6.1.2	Bogenlänge (Rektifikation) . . . . .	500
9.6.1.3	Mantelflächen von Rotationskörpern (Komplanation) . . . . .	500
9.6.1.4	Volumen von Rotationskörpern (Kubatur) . . . . .	501
9.6.1.5	Volumen eines Körpers . . . . .	501
9.6.2	Technisch-physikalische Anwendungen . . . . .	502
9.6.2.1	Bewegungen, Kinematik . . . . .	502
9.6.2.2	Arbeit . . . . .	503
9.6.2.3	Zeitlich veränderliche Ströme und Spannungen	503
9.6.2.4	Momente 1. Grades . . . . .	503
9.6.2.5	Schwerpunkte . . . . .	505
9.6.2.6	Momente 2. Grades (Festigkeitslehre) . . . . .	507
9.6.2.7	Massenmomente 2. Grades (Dynamik) . . . . .	509
<b>10</b>	<b>Vektoranalysis . . . . .</b>	<b>510</b>
10.1	Vektorfunktionen . . . . .	510
10.2	Felder . . . . .	511
10.3	Gradient eines skalaren Feldes . . . . .	514
10.4	Divergenz eines Vektorfeldes . . . . .	516
10.5	Rotation eines Vektorfeldes . . . . .	518
10.6	Kurvenintegrale (Linienintegrale) . . . . .	520
10.6.1	Kurvenintegral erster Art . . . . .	520
10.6.2	Kurvenintegral (zweiter Art) . . . . .	521
10.7	Flächenintegrale (Oberflächenintegrale) . . . . .	526
10.7.1	Flächenintegral erster Art . . . . .	526
10.7.2	Flächenintegral zweiter Art . . . . .	527
10.8	Integralsätze . . . . .	529
10.8.1	GAUSSScher Integralsatz . . . . .	529
10.8.2	STOKESScher Integralsatz . . . . .	531

---

<b>11</b>	<b>Differenzialgleichungen</b>	<b>534</b>
11.1	Allgemeines	534
11.1.1	Differenzialgleichungen, Arten	534
11.1.2	Gewöhnliche Differenzialgleichungen	535
11.2	Differenzialgleichungen 1. Ordnung	540
11.2.1	Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen	540
11.2.2	Gleichgradige Differenzialgleichungen 1. Ordnung	542
11.2.3	Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	543
11.2.3.1	Homogene lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	543
11.2.3.2	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung	544
11.2.4	Totale Differenzialgleichungen	546
11.2.5	Integrierender Faktor	547
11.2.6	BERNOULLISCHE Differenzialgleichung	548
11.2.7	RICCATISCHE Differenzialgleichung	548
11.2.8	CLAIRAUTSCHE Differenzialgleichung	549
11.3	Differenzialgleichungen 2. Ordnung	550
11.3.1	Sonderfälle, Erniedrigung der Ordnung	550
11.3.2	Homogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	552
11.3.3	Homogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten	553
11.3.4	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	554
11.3.5	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit veränderlichen Koeffizienten	558
11.3.6	BESSELSche Differenzialgleichung	560
11.3.7	Anwendungsfall Schwingungen	562
11.4	Differenzialgleichungen $n$ -ter Ordnung	565
11.5	Lineare Differenzialgleichungssysteme	569
11.6	Näherungslösungen für Differenzialgleichungen 1. Ordnung	571
11.6.1	Verfahren unbestimmter Koeffizienten	571
11.6.2	Iterationsverfahren	573
11.7	Anfangswertprobleme	574
11.7.1	Allgemeines	574
11.7.2	Explizite Einschrittverfahren	577
11.7.2.1	Polygonzugverfahren von EULER-CAUCHY	577
11.7.2.2	HEUN-Verfahren	579
11.7.2.3	Klassisches Verfahren von RUNGE-KUTTA	579
11.7.2.4	Einbettungsformeln	580

11.7.3	Mehrschrittverfahren . . . . .	580
11.7.3.1	Explizitverfahren von ADAMS-BASHFORTH . . .	581
11.7.3.2	Prädiktor-Korrektor-Verfahren von ADAMS- MOULTON . . . . .	581
11.7.4	Extrapolationsverfahren von BULIRSCH-STOER-GRAGG	583
11.8	Randwertprobleme . . . . .	583
11.8.1	Allgemeines . . . . .	583
11.8.2	Schießverfahren . . . . .	585
11.8.3	Direkte Differenzenapproximation . . . . .	586
11.9	Partielle Differenzialgleichungen . . . . .	589
11.9.1	Allgemeines . . . . .	589
11.9.2	Partielle Differenzialgleichung 1. Ordnung . . . . .	589
11.9.3	Partielle Differenzialgleichung 2. Ordnung . . . . .	591
<b>12</b>	<b>Reihen, F- und L-Transformation . . . . .</b>	<b>593</b>
12.1	Unendliche Reihen . . . . .	593
12.1.1	Unendliche Zahlenreihen . . . . .	593
12.1.2	Summen einiger konvergenter Zahlenreihen . . . . .	596
12.1.3	Potenzreihen . . . . .	597
12.1.3.1	Allgemeines . . . . .	597
12.1.3.2	Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen . . . . .	599
12.1.4	Numerische Berechnung von Reihen . . . . .	602
12.1.5	Zusammenstellung fertig entwickelter Reihen . . . . .	603
12.1.6	Näherungsformeln . . . . .	607
12.2	FOURIER-Reihen . . . . .	609
12.2.1	FOURIER-Reihe einer periodischen Funktion . . . . .	609
12.2.2	Numerische harmonische Analyse . . . . .	615
12.2.3	Ausgewählte FOURIER-Reihen . . . . .	616
12.3	FOURIER-Transformation . . . . .	622
12.4	LAPLACE-Transformation . . . . .	625
12.4.1	LAPLACE-Transformation, Allgemeines . . . . .	625
12.4.2	Rechenregeln der LAPLACE-Transformation . . . . .	627
12.4.3	Anwendungen der LAPLACE-Transformation . . . . .	630
12.4.3.1	Lösung linearer Differenzialgleichungen . . . . .	630
12.4.3.2	Test linearer Übertragungsglieder . . . . .	634
12.4.4	Korrespondenztabelle der LAPLACE-Transformation . . . . .	637
<b>13</b>	<b>Statistik, Stochastik . . . . .</b>	<b>641</b>
13.1	Beschreibende (deskriptive) Statistik . . . . .	641
13.1.1	Grundbegriffe . . . . .	641
13.1.2	Lageparameter . . . . .	645
13.1.3	Streuungsparameter . . . . .	650
13.1.4	Korrelation . . . . .	653
13.1.5	Lineare Ausgleichsrechnung . . . . .	655
13.1.5.1	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	655

13.1.5.2	Ausgleichende Gerade	656
13.1.5.3	Ausgleichende Parabel	657
13.1.5.4	Multiple Regression	658
13.1.6	Fehlerfortpflanzung	659
13.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	663
13.2.1	Zufallsexperiment und Ereignis	663
13.2.2	Definition der Wahrscheinlichkeit	665
13.2.3	Sätze über Wahrscheinlichkeiten	666
13.2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse	668
13.2.5	Zufällige Variable	671
13.2.6	Kenngößen von zufälligen Variablen	674
13.2.6.1	Erwartungswert	674
13.2.6.2	Varianz und Standardabweichung	676
13.2.6.3	Schiefe und Exzess	678
13.2.7	Ausgewählte diskrete Verteilungen	679
13.2.7.1	Diskrete Gleichverteilung	679
13.2.7.2	BERNOULLI-Verteilung	680
13.2.7.3	Binomialverteilung	680
13.2.7.4	POISSON-Verteilung	683
13.2.7.5	Hypergeometrische Verteilung	685
13.2.7.6	Geometrische Verteilung	686
13.2.8	Ausgewählte stetige Verteilungen	687
13.2.8.1	Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)	687
13.2.8.2	Normalverteilung	687
13.2.8.3	Exponentialverteilung	693
13.2.8.4	$\chi^2$ -Verteilung	694
13.2.8.5	$t$ -Verteilung (STUDENT-Verteilung)	695
13.3	Schließende (induktive) Statistik	696
13.3.1	Grundbegriffe	696
13.3.2	Punktschätzungen	697
13.3.3	Intervallschätzungen	699
13.3.3.1	Konfidenzintervall für den Anteil $p$	700
13.3.3.2	Konfidenzintervalle für den Erwartungswert $\mu$	701
13.3.3.3	Konfidenzintervall für die Varianz $\sigma^2$	704
13.3.4	Hypothesentests	705
13.3.4.1	Allgemeines über Tests	705
13.3.4.2	Test über den Anteil $p$	707
13.3.4.3	Tests über den Erwartungswert $\mu$	710
13.3.4.4	Test über die Varianz $\sigma^2$	713
13.3.4.5	$\chi^2$ -Anpassungstest	714
<b>14</b>	<b>Integraltabellen</b>	<b>717</b>
14.1	Integrale rationaler Funktionen	718
14.1.1	Integrale mit $ax + b$	718

14.1.2	Integrale mit $ax + b, cx + d$ . . . . .	721
14.1.3	Integrale mit $ax^2 + bx + c$ . . . . .	722
14.1.4	Integrale mit $a^2 \pm x^2$ . . . . .	724
14.1.5	Integrale mit $a^3 \pm x^3$ . . . . .	727
14.1.6	Integrale mit $a^4 + x^4, a^4 - x^4$ . . . . .	728
14.2	Integrale nichtrationaler Funktionen . . . . .	728
14.2.1	Integrale mit $\sqrt{x^n}$ und $(a^2 \pm b^2x)^m$ . . . . .	728
14.2.2	Integrale mit $\sqrt{(ax + b)^n}$ . . . . .	729
14.2.3	Integrale mit $\sqrt{(ax + b)^n}, \sqrt{(cx + d)^m}$ . . . . .	731
14.2.4	Integrale mit $\sqrt{(a^2 + x^2)^n}$ . . . . .	733
14.2.5	Integrale mit $\sqrt{(a^2 - x^2)^n}$ . . . . .	736
14.2.6	Integrale mit $\sqrt{(x^2 - a^2)^n}$ . . . . .	738
14.2.7	Integrale mit $\sqrt{(ax^2 + bx + c)^n}$ . . . . .	741
14.3	Integrale transzendenter Funktionen . . . . .	744
14.3.1	Integrale mit $e^{ax}$ (Exponentialfunktionen) . . . . .	744
14.3.2	Integrale der Hyberbelfunktionen . . . . .	745
14.3.3	Integrale mit $\ln x$ (logarithmische Funktion) . . . . .	747
14.3.4	Integrale mit $\sin ax$ . . . . .	748
14.3.5	Integrale mit $\cos ax$ . . . . .	751
14.3.6	Integrale mit $\sin ax$ und $\cos ax$ bzw. $\cos bx$ . . . . .	754
14.3.7	Integrale mit $\tan ax$ bzw. $\cot ax$ . . . . .	758
14.3.8	Integrale der Arkusfunktionen . . . . .	760
14.3.9	Integrale der Areafunktionen . . . . .	761
14.4	Bestimmte und uneigentliche Integrale . . . . .	762
<b>Anhang</b>	. . . . .	<b>770</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>	. . . . .	<b>781</b>