

## 4 Strömungen ohne Dichteänderung (quasi-inkompressible Strömungen)

### 4.1 Eindimensionale Strömungen realer inkompressibler Fluide (Flüssigkeiten)

#### 4.1.1 Innenströmungen (Rohrströmungen)

##### 4.1.1.1 Erweiterte Energiegleichung

Bei der Strömung realer Fluide, mit oder ohne Energieumsetzung, treten Verluste durch Reibung und Turbulenz (Wirbel) auf. Die dabei verloren gehende Strömungsenergie (Verlustenergie) wird in Wärme- und meist unbedeutende Schallenergie umgesetzt. Während die Geräuschenergie stört, beeinflusst die Erwärmung, insbesondere bei inkompressiblen Fluiden, den Strömungsverlauf meistens nicht. Diese durch innere Reibung und Impulsaustausch (Turbulenz) letztlich in Wärme umgesetzte mechanische Energie, die **Dissipation** (dissipieren), wird als **Verlustenergie**  $Y_V$  bezeichnet.  $Y_V$  ist dabei ebenfalls auf die Masseneinheit bezogen, also die spezifische Verlustenergie. Mechanische Energie wird auch als geordnete Energie (hochwertig) und Wärme als ungeordnete Energie (geringerwertig) bezeichnet. Dissipation ist daher, molekular betrachtet, die Umsetzung von kinetischer Energie der geordneten Teilchenbewegung der Strömung in die ungeordnete der Thermik (molekülbedingter Impulsübertrag, Abschnitte 1.3.3.1 und 3.3.2). Dissipation ist somit – thermodynamisch ausgedrückt – die Umwandlung von entropiefreier Energie (mechanischer) in entropiebehafte (Wärme).

Analog zum idealen Fluid ergibt sich die Energiegleichung realer Fluide, die sog. **Erweiterte Energiegleichung**, abgekürzt EE, ebenfalls aus der Energiebilanz. Strömt ein Medium in einen abgegrenzten Raum (Kontrollraum), z. B. in einem Rohr, von der Stelle ① nach Stelle ②, ist die gesamte Strömungsenergie (mechanische Energie) nach (3-83) an ② um die Verlust-

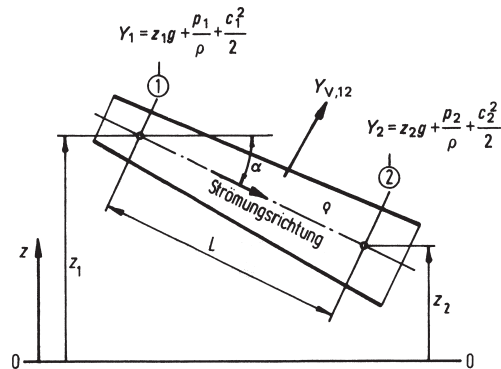


Bild 4-1. Innenströmung eines realen inkompressiblen Fluides von ① nach ②.

$Y$  spezifische mechanische Gesamtenergie der Strömung.

energie  $Y_{V,12}$ , die unterwegs durch Dissipation verloren geht, kleiner als an Stelle ①, gemäß Bild 4-1.

Die Energiebilanz der mechanischen Energie zwischen Stelle ① und ② ist erfüllt, wenn zur verbleibenden Strömungsenergie an Stelle ② die Verlustenergie hinzugerechnet wird. Gemäß den Bilanzbedingungen bedeutet dies, das Energiegleichgewicht ist dann erfüllt, wenn die Summe der Abgänge so groß ist wie die der Zugänge. Was hinausgeht, muss also gleich dem sein, was hineingeht (Erhaltungssatz). Gleichung (3-83) des idealen Fluides erweitert sich deshalb für die in Bild 4-1 eingetragene Strömungsrichtung (gekennzeichnet durch einen Pfeil) zu:

$$EE \text{ ①} - \text{②} \quad Y_1 = Y_2 + Y_{V,12}$$

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + Y_{V,12} \tag{4-1}$$

Gleichung (4-1) ist die **Erweiterte Energiegleichung realer inkompressibler Fluide** (Flüssigkeiten).

Bei entgegengesetzter Strömungsrichtung, also in Bild 4-1 von Stelle ② nach Stelle ① ist gemäß Energiebilanz die mechanische Verlust-

energie  $Y_V$  dann auf der Gleichungsseite von  $Y_1$  hinzuzufügen.

Entsprechend sind auch die anderen Energiegleichungen, (3-81) und (3-104), zu erweitern → EER.

Die gesamte spezifische Strömungsenergie  $Y$  auch als **Totalenergie** bezeichnet besteht jeweils wieder aus der Summe von Lagenergie, Druck- und kinetischer Energie (spezifische Werte).

Die Diskussion der Summanden der Erweiterten Energiegleichung (4-1) mit Bild 4-1 ergibt:

- Die Höhen  $z_1$  und  $z_2$  sind durch örtliche Gegebenheiten festgelegt.
- Die Strömungsgeschwindigkeiten sind mit den Querschnitten durch die Kontinuitätsgleichung gekoppelt.

Geschwindigkeiten und Höhen sind hier deshalb durch die Strömungsverluste nicht beeinflussbar. Die *Verlustenergie* geht daher voll zu Lasten der **Druckenergie**. Bei der Innenströmung (Rohrsysteme) realer Fluide ist somit der Druck in Strömungsrichtung, an der Stelle ②, kleiner als bei idealem Fluid. Es gilt also:

Strömungsverlust in Rohrleitungen verursacht Druckverlust.

*Bemerkung:* Querstriche auf den Geschwindigkeitssymbolen als Kennzeichen für Mittelwerte (energiegemittelt) werden wieder, wie meist üblich, weggelassen, wenn keine Verwechslung möglich (Benutzer-Hinweise).

#### 4.1.1.2 Energieliniengefälle

Das **Energiegefälle**  $J$  oder **Energieliniengefälle**, das auch mit **Drucklinien-** oder **Gesamtgefälle** bezeichnet wird, ist die Summe von Ortshöhengefälle und Druckhöhengefälle einer stationären Strömung in einem Rohr konstanten Querschnittes.

Wenn in Bild 4-1  $A_2 = A_1$  und damit  $c_2 = c_1$  wäre, liefert (4-1), da  $(z_1 - z_2)/L = \sin \alpha$ :

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + Y_{V,12} \quad \text{Hieraus}$$

$$Y_{V,12} = g(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_{V,12}}{L} &= g \left( \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) \\ &= g \left( \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\frac{Y_{V,12}}{L} = g \cdot J_{12} \quad (4-3)$$

Hierbei ist  $J_{12}$  das **Energieliniengefälle** zwischen den Stellen ① und ②:

$$J_{12} = \frac{z_1 - z_2}{L} + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} = \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \quad (4-4)$$

Sonderfall: Horizontale Rohrleitung ( $\alpha = 0$ ), Druckänderung dann nur infolge Verlust  $Y_V$ .

$$\text{Dafür wird } J_{12} = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} = \frac{Y_{V,12}}{L \cdot g}$$

$$\text{oder } Y_{V,12} = \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{\Delta p_{V,12}}{\rho} \quad (4-5)$$

#### 4.1.1.3 Gerade Rohre mit Kreisquerschnitt

##### 4.1.1.3.1 Grundsätzliches

Für die durch die Strömungsverluste (Reibung, Wirbel) bedingte *Verlustenergie* sind beim einfachsten Fall, der geraden Rohrleitung mit kreisförmigem Querschnitt, entsprechend dem NEWTONSchen Reibungsgesetz, (1-13) und (1-14), folgende Einflussgrößen bestimmend:

- Berührungsfläche zwischen Fluid- und Rohrwand (Länge  $L$ , Durchmesser  $D$ ), die sog. Benetzungsfläche
- Strömungsgeschwindigkeit  $c$  (mittlere!)
- Fluid-Art (Eigenschaften  $\rho, \eta$ )
- Strömungsform (laminar, turbulent)
- Wandrauigkeit  $k$

$$\text{also } Y_V = f(L, D, c, \rho, \eta, \text{Strömungsform}, k) \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{Re}$$

Die Verlustenergie ist demnach u. a. sicher abhängig von der REYNOLDS-Zahl  $Re$ , (3-45).

##### 4.1.1.3.2 Laminare Rohrströmungen

Infolge der Haftbedingung (Abschnitt 1.3.3.1) hat das Fluid direkt an der Rohrwand keine Strömungsgeschwindigkeit. Zur Rohrmitte muss die

Geschwindigkeit ansteigen. Dieses Geschwindigkeitsgefälle verursacht nach NEWTON eine Scherspannung zwischen den sich aneinander, infolge Symmetrie konzentrischen Schichten.

Das Verhalten der laminaren Strömung erlaubt eine rein theoretische Behandlung. Um die Verlustenergie analytisch darzustellen, wird in Strömungsrichtung das Kräftegleichgewicht an einem coaxialen Fluidzylinder, Bild 4-2, mit Radius  $r$  aufgestellt, wobei  $0 < r < R$ . Dies ist zulässig, da bei laminarer Strömung alle Fluidteilchen, die an der Zuströmfläche, Stelle ①, in den abgrenzenden Zylinder eintreten, diesen nur durch die Abströmfläche ② wieder verlassen. Ein Fluid- und damit energiebehalteter Impulsaustausch durch die Zylindermantelfläche findet wegen fehlender turbulenter Mischbewegung nicht statt. Bedingt durch die laminare Reibung (Scherspannung  $\tau$ ) ändert sich der Druck jedoch in Strömungsrichtung.

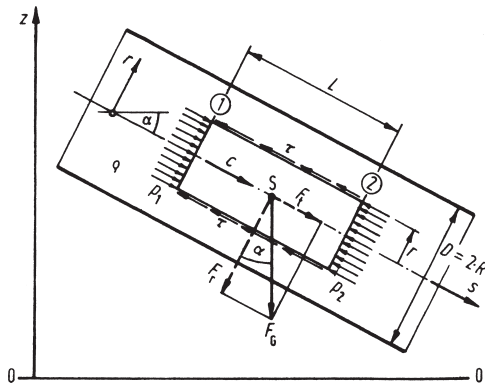


Bild 4-2. Kräfte auf einen Fluidzylinder, Durchmesser  $r$ ; Länge  $L$ , in stationärer laminarer Rohrströmung mit Komponenten-Zerlegung in die Richtungen des festgelegten  $(s, r)$ -Koordinatensystems.

Infolge Radialkraft  $F_r$  (Komponente der Gewichtskraft  $F_G$ ) ist der Druck auch über den Rohrquerschnitt nicht konstant. Da in Radialrichtung jedoch keine Strömung besteht, verändert sich hier der Druck in jedem Querschnitt gemäß dem fluidstatischen Grundgesetz (2-47). Über die Querschnitte ① und ② des Bezugs-

zylinders in Bild 4-2 steigt daher der Druck jeweils linear von oben nach unten. Ersatzweise eingetragen sind deshalb die zugehörigen Mittelwerte ( $p_1$  und  $p_2$ ) über den Querschnitten, die jeweils an der Rohrachse auftreten. Wegen des proportionalen Druckverlaufs in Querrichtung ist dies zulässig und führt daher zum richtigen Ergebnis (Hinweis auf Bild 3-30).

Bei stationärer Strömung ( $a_B = 0 \rightarrow$  nach NEWTON  $\Sigma F = m \cdot a_B = 0$ ) treten in Strömungsrichtung  $s$  auf:

Komponente der Gewichtskraft:

$$F_t = F_G \cdot \sin \alpha = \rho \cdot g \cdot \pi \cdot r^2 \cdot L \cdot \sin \alpha$$

Druckkräfte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stelle ① } F_{p,1} = p_1 \cdot A_1 = p_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 \\ \text{Stelle ② } F_{p,2} = p_2 \cdot A_2 = p_2 \cdot \pi \cdot r_2^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r = r_1 \\ \phantom{r} = r_2 \end{array}$$

Widerstandskraft infolge Fluidreibung, ebenfalls nach NEWTON  $\rightarrow$  (1-14):

$$F_W = \tau \cdot A_0 = -\eta \cdot \frac{dc}{dr} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot L$$

Das Minuszeichen bei der Widerstandskraft ist zur Kompensation des negativen Geschwindigkeitsgefälles notwendig,  $dc/dr$  ist negativ, da, wie zuvor und in Abschnitt 3.3.3 begründet, die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  im Rohr mit wachsendem Radius  $r$  abnimmt.

Kräftegleichgewicht in  $s$ -Richtung aufgestellt:

$$\Sigma F_s = 0 \rightarrow F_t + F_{p,1} - F_{p,2} - F_W = 0$$

Die obigen Beziehungen für die Kräfte eingesetzt und vereinfacht ( $r \cdot \pi$  gekürzt), führt zu:

$$\begin{aligned} & \rho \cdot g \cdot r \cdot L \cdot \sin \alpha + r \cdot (p_1 - p_2) + \eta \cdot \frac{dc}{dr} \cdot 2 \cdot L \\ & = 0 \quad | : L \quad \text{und umgestellt, ergibt:} \\ & 2 \cdot \eta \cdot \frac{dc}{dr} + \rho \cdot g \cdot r \left( \sin \alpha + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g \cdot L} \right) = 0 \quad | : \rho \end{aligned}$$

Mit Beziehung (4-2) und der kinematischen Viskosität  $\nu = \eta/\rho$  ergibt sich die Differenzial-

gleichung für die Strömungsgeschwindigkeit  $c$  als Funktion vom Radius  $r$ :

$$2 \cdot v \cdot (dc/dr) + (Y_V/L) \cdot r = 0$$

Die Variablen  $c$  und  $r$  getrennt sowie integriert:

$$\int dc = -\frac{Y_V}{2 \cdot v \cdot L} \cdot \int r \cdot dr$$

$$c = -\frac{Y_V}{2 \cdot v \cdot L} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

Die Integrationskonstante  $C$  folgt aus der Randbedingung (Haftbedingung):

$$c = 0 \quad \text{für} \quad r = R$$

Damit wird  $C = \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot R^2$

Eingesetzt in die Gleichung für  $c$  ergibt das **Gesetz von STOKES** für die *Geschwindigkeitsverteilung*  $c = f(r)$  der laminaren Rohrströmung:

$$c = \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot (R^2 - r^2) \tag{4-6}$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel. Die Geschwindigkeitsverteilung bei vollausgebildeter laminarer Innenströmung ist also parabolisch. Beim Kreisrohr liegen die Spitzen aller Geschwindigkeitsvektoren also auf einem Rotationsparaboloid, Bild 4-3, mit dessen Scheitel auf der Rohrachse.

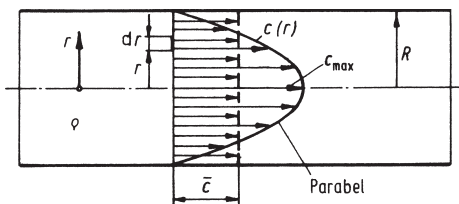


Bild 4-3. Geschwindigkeitsverlauf  $c = c(r)$  bei laminarer Innenströmung (Rohrströmung). Paraboloid-Mantel... Hüllfläche der rotationssymmetrischen räumlichen Geschwindigkeitsverteilung, mit eingetragenen Zylinder der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{c}$ .

Nach der Definition der Grenzschicht (Abschnitt 3.3.3.2) ist die laminare Rohrströmung

eine reine Grenzschichtströmung mit der Grenzschichtdicke  $\delta_L = R$  und der (ungestörten) Anströmgeschwindigkeit  $c_\infty = c_{\max}$ .

Die auf der Rohrachse liegende *maximale Strömungsgeschwindigkeit*  $c_{\max}$  ergibt sich aus (4-6) mit  $r = 0$  zu:

$$c_{\max} = \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot R^2 = \frac{Y_V}{16 \cdot v \cdot L} \cdot D^2 \tag{4-7}$$

Der **Volumenstrom** kann durch Integrieren, auch Aufleiten genannt, über den Rohrquerschnitt  $A$  ermittelt werden:

$$\dot{V} = \int_{(A)} d\dot{V} \quad \text{hierbei nach Bild 4-3}$$

$$d\dot{V} = dA \cdot c(r) = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot c(r)$$

Mit (4-6) ergibt sich:

$$\dot{V} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{Y_V}{4 \cdot v \cdot L} \cdot \int_0^R (R^2 \cdot r - r^3) \cdot dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{Y_V}{v \cdot L} \left( R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R$$

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{Y_V}{v \cdot L} \cdot R^4 \tag{4-8}$$

Wird der Volumenstrom  $\dot{V} = \Delta V / \Delta t$  bei stationärer Strömung durch Messung des Ausflussvolumens  $\Delta V$  während der Zeit  $\Delta t$  bestimmt, kann mit (4-8) die kinematische Viskosität  $v$  ermittelt werden. Die schon in Abschnitt 1.3.3 erwähnten **Kapillarviskosimeter** nach UBBELOHDE<sup>1</sup> arbeiten nach diesem Verfahren. Dabei wird die kinematische Viskosität abhängig von der Fluidtemperatur bestimmt und in einem sog. **Viskositäts-Temperatur-Blatt** (VT-Blatt) nach UBBELOHDE aufgetragen. Die Koordinaten des VT-Diagramms sind dabei so geteilt, dass sich der Viskositätsverlauf von NEWTONschen Fluiden als Gerade darstellt (Abschnitt 1.3.5.2).

Gleichung (4-8) lässt sich weiter umschreiben:

$$\dot{V} = \frac{Y_V}{8 \cdot v \cdot L} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{Y_V}{8 \cdot v \cdot L} \cdot R^2 \cdot A \tag{4-9}$$

<sup>1)</sup> UBBELOHDE, Leo (1876 bis 1964), dt. Chemiker.

Mit der *mittleren Strömungsgeschwindigkeit*  $\bar{c}$  gilt andererseits die Bedingung (3-3):

$$\dot{V} = A \cdot \bar{c} \quad (4-10)$$

Aus Gleichsetzen von (4-9) mit (4-10) folgt:

$$\bar{c} = \frac{Y_V}{8 \cdot v \cdot L} \cdot R^2 = \frac{Y_V}{32 \cdot v \cdot L} \cdot D^2 \quad (4-11)$$

Der Vergleich mit (4-7) liefert:

$$\bar{c} = \frac{1}{2} \cdot c_{\max} \quad (4-12)$$

Die **Verlustenergie**  $Y_V$  ergibt sich durch Umstellen von (4-11) und sinnvollerweise anschließendem Erweitern mit  $\bar{c}/\bar{c}$ :

$$Y_V = 32 \cdot v \cdot L \cdot \frac{\bar{c}}{D^2} = 64 \cdot \frac{v}{\bar{c} \cdot D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-13)$$

Mit der REYNOLDS-Zahl  $Re = \bar{c} \cdot D/v$  wird:

$$Y_V = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-14)$$

Gleichung (4-14) wird nach ihren Entdeckern als **HAGEN<sup>1</sup>-POISEUILLE<sup>2</sup>sches Gesetz** bezeichnet.

Mit der Abkürzung  $\lambda = 64/Re$  (4-15)

der sog. **Rohrreibungszahl**  $\lambda$ , erhält das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE die Form:

$$Y_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-16)$$

Die *Rohrreibungszahl*  $\lambda$  und damit die *Verlustenergie*  $Y_V$  ist bei laminarer Strömung eine direkte Funktion der REYNOLDS-Zahl sowie theoretisch völlig unabhängig von der üblichen Rohr-Rauigkeit, was auch Experimente und

<sup>1)</sup> HAGEN, Gotthilf (1797 bis 1884), dt. Wasserbau-meister.

<sup>2)</sup> POISEUILLE, Jean Louis Maria (1799 bis 1869), frz. Mediziner, Untersuchung der Strömung des Blutes in Adern. Beide Forscher entdeckten das o.g. Gesetz unabhängig voneinander.

die Praxis bestätigen. Bei größerer Rauigkeit Umschlag in Turbulenz (Abschnitt 4.1.1.3.4).

Bei laminarer Strömung ist die Verlustenergie nach (4-13) proportional der Geschwindigkeit. In (4-14) und (4-16) ist dieser lineare Zusammenhang zwischen  $Y_V$  und  $\bar{c}$ , obwohl vorhanden, infolge obiger Erweiterung ( $\bar{c}/\bar{c}$ ), nicht mehr direkt erkennbar.

Querstrich über  $c$ -Symbol wird bequemerweise meist wieder weggelassen.

Infolge des fehlenden makroskopischen Queraustauschs (Abschnitt 3.3.2.2.1) hängt die Reibung bei laminarer Strömung theoretisch nicht und praktisch vernachlässigbar von der üblichen Wandrauigkeit ab. Die Schichtenbewegung deckt die Rauigkeiten ab und schafft sich dadurch selbst eine quasi glatte Wand.

#### 4.1.1.3.3 Laminare Strömung zwischen parallelen Platten

Entsprechend der laminaren Rohrströmung lässt sich die stationäre Laminarbewegung eines Fluides zwischen zwei parallelen Platten behandeln (Bild 4-4 mit  $b \rightarrow \infty$ ). Da es sich um eine ebene Strömung in Plattenrichtung ( $x$ -Koordinate) handelt, sind  $c_y = 0$ ,  $c_z = 0$  sowie  $\delta p/\delta y = 0$  und  $\delta p/\delta z = 0$ , weshalb keine partiellen Differenziale notwendig.

Gleichgewichtsansatz für das in Bild 4-4 eingetragene Fluidteilchen:

Da stationär, also Beschleunigung  $a = 0$ , gilt  $\Sigma F = 0$ . Deshalb:

$$p \cdot dA - (p + dp) \cdot dA - \tau \cdot dA_0 + (\tau + d\tau) \cdot dA_0 = 0$$

Ausgewertet mit Stirnfläche  $dA = dz \cdot b$  (Querschnitt) und Scherfläche  $dA_0 = dx \cdot b$  (eine seitliche Fläche  $\rightarrow$  Oberfläche):

$$- dp \cdot dz \cdot b + d\tau \cdot dx \cdot b = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dz}$$

Mit (1-15) ergibt sich, wobei  $\eta = \text{konst}$  (NEWTONSches Fluid):

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dz} \left( \eta \cdot \frac{dc_x}{dz} \right) = \eta \cdot \frac{d^2 c_x}{dz^2} \quad (4-16a)$$

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

a) Beide Wände bewegen sich nicht.

Das Fluid strömt zwischen den Platten infolge linearem Druckabfall in  $x$ -Richtung, also  $dp/dx = \text{konst}$ , weshalb ! Zeichen. Dann gilt gemäß (4-4): Das Energiegefälle ist konstant. Angewendet auf das Teilchen in Bild 4-4, liefert:

$$J = \frac{p - (p + dp)}{\rho \cdot g \cdot dx} = -\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{dp}{dx} \stackrel{!}{=} \text{konst}$$

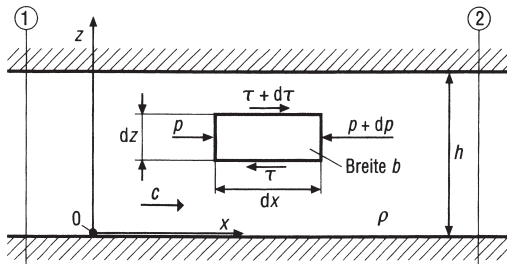


Bild 4-4. Stationäre Laminarströmung (eindimensional  $\rightarrow$  1D) zwischen zwei parallelen Platten von Abstand  $h$  und Breite  $b$ , letztere senkrecht zur Bildebene ( $y$ -Richtung).

Umgestellt nach  $dp/dx$  und eingesetzt in (4-16a), ergibt mit  $\nu = \eta/\rho$ :

$$\frac{d^2 c_x}{dz^2} = -\rho \cdot g \cdot J \cdot \frac{1}{\eta} = -\frac{g \cdot J}{\nu}$$

Diese Differenzialgleichung für  $c_x = f(z)$ , zweimal integriert (aufgeleitet), führt zu:

$$c_x = -\frac{J \cdot g}{\nu} \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 \cdot z + C_2$$

Die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  folgen aus den Randbedingungen:

Bei  $z = 0$  ist  $c_x = 0$  ergibt:

$$C_2 = 0$$

Bei  $z = h$  ist  $c_x = 0$  ergibt:

$$C_1 = (J \cdot g/\nu) \cdot (h/2)$$

Eingesetzt liefert:

$$c_x = \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} (h \cdot z - z^2) \quad (4-16b)$$

Analog zu (4-6) ergibt sich wieder ein parabolischer Geschwindigkeitsverlauf, also  $c_x = c_x(z) = f(z^2)$ .

Der **Volumenstrom**  $\dot{V}$  zwischen den Platten ist durch Integration (Aufleitung):

$$\dot{V} = \int_{(A)} d\dot{V} = \int_0^h c_x \cdot b \cdot dz \quad (4-16b) \text{ eingesetzt:}$$

$$\dot{V} = b \cdot \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \int_0^h (h \cdot z - z^2) dz$$

$$\dot{V} = b \cdot \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \left( h \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h$$

$$\dot{V} = b \cdot \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \left( h \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{J \cdot g}{2 \cdot \nu} \cdot \frac{b \cdot h^3}{6}$$

$$\dot{V} = \frac{J \cdot g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \cdot b \cdot h = \frac{J \cdot g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \cdot A \quad (4-16c)$$

mit der Querschnittsfläche  $A = b \cdot h$ , wobei  $b \gg h$ .

Aus  $\dot{V} = \bar{c} \cdot A$  folgt mit (4-16c) für die globale mittlere Geschwindigkeit  $\bar{c}$ , d. h. der über den Strömungsquerschnitt  $A$  gemittelte Wert (Globalmittelwert):

$$\bar{c} = \frac{J \cdot g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \quad (4-16d)$$

Das Energieliniengefälle  $J$  gemäß (4-5) in Beziehung (4-16d) eingeführt, ergibt:

$$\bar{c} = \frac{g \cdot h^2}{12 \cdot \nu} \cdot \frac{Y_V}{L \cdot g} \quad \text{Hieraus spez. Verlustenergie:}$$

$$Y_V = \frac{12 \cdot \nu}{h} \cdot \frac{L}{h} \cdot \bar{c} \quad \text{mit Strömungsweg } L = x_2 - x_1$$

Erweitert mit  $\bar{c}/\bar{c}$  und  $(\bar{c} \cdot h)/\nu = Re_h$  gesetzt, also die auf den Plattenabstand  $h$  bezogene REYNOLDS-Zahl eingeführt, liefert:

$$Y_V = \frac{24}{\bar{c} \cdot h/\nu} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} = \frac{24}{Re_h} \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} = \lambda \cdot \frac{L}{h} \cdot \frac{\bar{c}^2}{2} \quad (4-16e)$$

Es ergibt sich zwangsläufig der zu (4-16) entsprechende Aufbau. Hierbei beträgt jedoch die laminare Platten-Reibungszahl  $\lambda = 24/Re_h$ , die von der für Rohre abweicht, gemäß (4-15).

Bemerkung: Bequemerweise wird der Querschnitt über dem Geschwindigkeitssymbol  $c$  meist wieder weggelassen (Abschnitt 3.1.2).

b) Eine Wand steht, die andere bewegt sich.

Festgelegt wird hierzu: Die untere Platte ruht, die obere bewegt sich mit Geschwindigkeit  $c_{x,0}$  in Plattenrichtung ( $x$ -Koordinate).

Infolge Haftbedingung verursacht die Plattenbewegung im Fluid eine Schleppströmung. Durch das Haften ergeben sich jetzt folgende Randbedingungen: Bei  $z = 0$  ist  $c_x = 0$  und bei  $z = h$  ist  $c_x = c_{x,0}$ . Des Weiteren sind jetzt, da das Fluid nur durch Mitschleppen bewegt wird, keine Druckgefälle vorhanden. Das gilt sowohl für die Quer- ( $z$ -Achse), als auch Längsrichtung ( $x$ -Koordinate), weshalb  $dp/dz = 0$  und  $dp/dx = 0$ . Damit ergibt (4-16a):

$$\frac{d^2 c_x}{dz^2} = 0$$

Diese einfache Differenzialgleichung zweimal integriert (aufgeleitet), führt zu:

$$c_x = K_1 \cdot z + K_2$$

Die Randbedingungen ergeben für die Integrationskonstanten:

$$z = 0; c_x = 0 \rightarrow K_2 = 0$$

$$z = h; c_x = c_{x,0} \rightarrow K_1 = c_{x,0}/h$$

Eingesetzt, ergibt:

$$c_x = c_{x,0} \cdot (z/h) \tag{4-16f}$$

Der Geschwindigkeitsverlauf ist jetzt – gegenläufig zu Fall a – linear. Diese Fluidströmung wird gewöhnlich als COUETTE-Strömung (Abschnitt 1.3.5.1) bezeichnet.

Für Scherspannung  $\tau$  sowie Reibungskraft  $F_R$  ergeben sich dann nach (1-15) und (1-14):

$$\tau = \eta \cdot \frac{dc_x}{dz} = \eta \cdot \frac{c_{x,0}}{h} = \text{konst} \tag{4-16g}$$

$$F_R = \tau \cdot A_0 = \eta \cdot \frac{c_{x,0}}{h} \cdot b \cdot L \tag{4-16h}$$

Ergebnis: Schubspannung  $\tau$  ist im gesamten Fluid gleich groß (Abschnitt 1.3.5.1).

#### 4.1.1.3.4 Turbulente Rohrströmungen

Technische Rohrströmungen sind, bis auf wenige Ausnahmen, turbulent. Turbulente Rohrströmung ist daher nicht nur wesentlich wichtiger, sondern infolge der makroskopischen *Mischbewegung* zudem ungleich komplizierter als die laminare. Bis heute ist eine theoretische Darstellung der Gesetzmäßigkeiten turbulenter Strömung noch nicht gelungen. Ein analytischer Turbulenzansatz fehlt noch (Abschnitt 4.3.1.7). Erst umfangreiche experimentelle Untersuchungen und numerische Modellansätze ermöglichten eine brauchbare Klärung der turbulenten Strömung. Die auf der Grundlage von Versuchen erarbeiteten Näherungsformeln, Tabellen und Diagramme liefern für die technische Anwendung meist zufriedenstellende Ergebnisse.

Wie bereits in Abschnitt 3.3.2.2 auseinandergesetzt, sind die Mischungsverluste beim Impulsaustausch infolge der Geschwindigkeitsschwankungen fast immer wesentlich größer als die gleichzeitig vorhandenen NEWTONSchen Reibungsverluste. Beide Erscheinungen sind zur Gesamtviskosität, der sog. scheinbaren Viskosität (Abschnitt 3.3.2.2.3), zusammenfassbar und ergeben die gesamte Schubspannung, (3-50). Außerdem beeinflusst die Wandbeschaffenheit den Strömungswiderstand. Die Geschwindigkeitsverteilung ist infolge des turbulenten Mischungsvorganges zwangsläufig gleichmäßiger und die Verlustenergie wesentlich größer als bei laminarer Strömung.

**Geschwindigkeits-Verteilung:** Nach NIKURADSE, der weitgehende Versuchsreihen auswertete, gilt:

Für den Geschwindigkeitsverlauf:

$$c(r) = (1 - (r/R))^n \cdot c_{\max} \tag{4-17}$$

**Potenzgesetz des Geschwindigkeitsverlaufes.** Wird auch als **1/7-Potenzgesetz** der Ge-

Tabelle 4-1. Exponent  $n$  und Faktor  $K$  zum Potenzgesetz des turbulenten Geschwindigkeitsverlaufs bei Rohrströmungen in Abhängigkeit von der  $Re$ -Zahl

$Re$	$4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^6$	$(2 \dots 3,2) \cdot 10^6$
$n$	1/6	1/6,6	1/7	1/8,8	1/10
$K$	0,791	0,807	0,817	0,850	0,865

geschwindigkeits-Verteilung bezeichnet, da  $n \approx 1/7$ . Nachteil des im Wesentlichen auf Messergebnissen beruhenden empirischen Potenzgesetzes: Der sich ergebende angenäherte Geschwindigkeitsverlauf ist unstetig. In der Rohrmitte, also bei  $r = 0$ , tritt ein Knick (Unstetigkeit) auf, was mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmt.

Für die mittlere Geschwindigkeit gesetzt:

$$\bar{c} = K \cdot c_{\max} \tag{4-18}$$

Mit dem Faktor:

$$K = \frac{2}{(n+1) \cdot (n+2)} \tag{4-19}$$

Exponent  $n$  und Faktor  $K$  sind von der REYNOLDS-Zahl und in geringem Maße auch von der Wandrauigkeit abhängig. Tabelle 4-1 enthält Werte von  $n$  und  $K$  für verschiedene  $Re$ -Zahlen.

Mittelwert von Faktor  $K$ :

$$\bar{K} \approx 0,83 \pm 4\% \tag{4-20}$$

Die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt demnach etwa 83% von der *maximalen*; bei laminarer sind dies, wie zuvor begründet, nur 50%. Auch hieraus ergibt sich, dass der Geschwindigkeitsverlauf, Bild 4-5, bei turbulenter Strömung im mittleren Bereich (Rohrmitte) wesentlich flacher ist als bei laminarer und zwangsläufig einen steileren Randabfall aufweist. Die Geschwindigkeit steigt in der dünnen *laminaren Unterschicht* (Viskosschicht) sehr steil an und bleibt dann im Außenbereich ungefähr konstant. In der laminaren Unterschicht treten nur NEWTONSche Reibungskräfte auf, während im

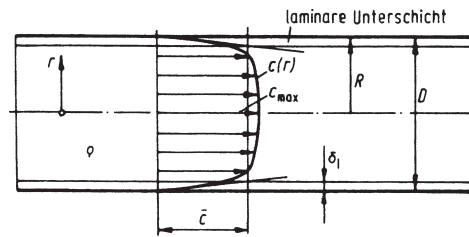


Bild 4-5. Geschwindigkeitsverlauf  $c(r)$  bei turbulenter Innenströmung (Rohrströmung).  $\delta_1$  Dicke der viskosen Unterschicht.

Außenbereich hauptsächlich Mischungsverluste entstehen (Abschnitte 3.3.3 und 4.1.6.1.2).

Versuche ergeben, dass die *Geschwindigkeitsprofile* rauher Rohre in Wandnähe meist einen weniger steilen Abfall aufweisen als bei glatter Rohrwand. Mit zunehmender Rauigkeit wächst der Exponent  $n$  (wenn auch nur geringfügig) des Potenzgesetzes, (4-17). Die Wandrauigkeiten wirken jedoch turbulenzanregend und -verstärkend.

Ebenso wie die laminare, ist auch die turbulente Rohrströmung gemäß Grenzschichtdefinition (Abschnitt 3.3.3.2) eine reine Grenzschichtströmung mit der Grenzschichtdicke  $\delta_T = R$  und  $c_{\max}$  als ungestörter Anström- oder Außenströmung  $c_\infty$  (Geschwindigkeit).

Statt des Potenzgesetzes nach (4-17) wird der Geschwindigkeitsverlauf auch vorteilhaft durch ein asymptotisch-**logarithmisches Gesetz** angenähert. Nach SCHLICHTING [53] gilt mit der sog. Schubspannungsgeschwindigkeit  $c_\tau$  (4-41) als logarithmisches Geschwindigkeitsgesetz:

$$\frac{c_{\max} - c(r)}{c_\tau} = -\frac{1}{\varkappa} \cdot \left[ \ln \left( 1 - \sqrt{\frac{r}{R}} \right) + \sqrt{\frac{r}{R}} \right] \tag{4-20a}$$

Hierbei handelt es sich um eine semiempirische Beziehung. Dieses halbexperimentelle Gesetz beruht somit auf theoretischen Überlegungen, das durch experimentell ermittelte Größen (Konstante  $\varkappa$ ) den tatsächlichen Verhältnissen angepasst ist. Die empirische Anpassungskonstante  $\varkappa$  liegt im Bereich  $\varkappa = 0,35$  bis  $0,45$ .



Es ergibt sich durch das Logarithmusgesetz ein wirklichkeitsgetreuer stetiger Geschwindigkeitsverlauf. Das Geschwindigkeitsprofil weist deshalb keine Unstetigkeit in der Rohrmitte auf. Die Formel gilt jedoch nur bis etwa  $r/R \leq 0,95$ , also nicht in der viskosen Unterschicht. Der große Vorteil des logarithmischen Gesetzes gegenüber dem Potenzgesetz besteht zudem darin, dass es auch für sehr große REYNOLDS-Zahlen asymptotisch verläuft. Deshalb kann es auf beliebig große *Re*-Zahlen, auch über den durch Messungen überspannten Bereich hinaus, extrapoliert werden. Bei dem Potenzgesetz dagegen ändert sich entsprechend Tabelle 4-1 der Exponent mit der *Re*-Zahl. Das universelle logarithmische Geschwindigkeitsgesetz ermöglicht als weiteres die Abgrenzung der Strömungsform. Gemäß SCHLICHTING [53] gilt hiernach für sog. technisch (hydraulisch) glatte Strömungen:

*Rein laminare* Reibung (laminarer Bereich gemäß Bild 4-6):

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot Re^{0,875} < 50 \quad (4-21)$$

*Laminar-turbulente* Reibung, d. h. laminare und turbulente Reibung von gleicher Größenordnung (Übergangsbereich, Bild 4-6):

$$50 < \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot Re^{0,875} < 700 \quad (4-22)$$

*Rein turbulente* Reibung („rauer“ Bereich nach Bild 4-6):

$$\left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot Re^{0,875} > 700 \quad (4-23)$$

Außerdem ergibt sich nach [53] bei *turbulenter Strömung an glatter Wand* für die Dicke  $\delta_l$  der laminaren Unterschicht (Bild 4-5):

$$\delta_l \approx \frac{50}{Re^{0,875}} \cdot R = \frac{25}{Re^{0,875}} \cdot D \quad (4-24)$$

**Verlustenergie**  $Y_V$ : Entgegen der laminaren Strömung kann bei turbulenter infolge der Mischbewegung kein coaxialer Fluidzylinder gemäß Bild 4-2 herausgegriffen werden, um Kräftebetrachtungen durchzuführen. Durch die

überlagerten Querbewegungen würde ein Fluid- und damit Energieaustausch durch den Bezugszylindermantel erfolgen, der analytisch letztlich nicht exakt erfassbar ist. Die Untersuchungen müssen deshalb auf den ganzen Rohrquerschnitt ausgedehnt werden.

Nach Erfahrung bzw. Versuchen gilt für die Widerstandskraft:

$$\begin{aligned} F_W &\sim \text{der benetzten Rohrwand } D \cdot \pi \cdot L \\ &\sim \text{der kinetischen Energie } c^2/2 \\ &\sim \text{der Fluidart, gekennzeichnet durch deren Dichte } \rho \end{aligned}$$

Hierbei steht das Zeichen  $\sim$  für proportional.

Mit dem Proportionalitätsfaktor  $\Psi$  ergibt sich:

$$F_W = \Psi \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot \rho \cdot (c^2/2)$$

Andererseits kann gesetzt werden mit (4-5):

$$F_W = \Delta p_V \cdot A = \Delta p_V \cdot D^2 \cdot \pi/4 = \rho \cdot Y_V \cdot D^2 \cdot \pi/4$$

Gleichgesetzt:

$$\rho \cdot Y_V \cdot D^2 \cdot \pi/4 = \Psi \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot \rho \cdot c^2/2$$

Hieraus:  $Y_V = 4 \cdot \Psi \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2}$

Mit der Zusammenfassung  $\lambda = 4 \cdot \Psi$  ergibt sich die **Formel von DARCY**<sup>1</sup>, kurz **DARCYformel**:

$$Y_V = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{c^2}{2} \quad (4-25)$$

Zu beachten ist, dass die **Rohrreibungszahl**  $\lambda$  bei dieser Formel von DARCY, entgegen der für laminare Strömung (4-15), nur experimentell bestimmt werden kann.

Im Gegensatz zur laminaren Rohrströmung (4-13) wächst die Verlustenergie gemäß (4-25) bei turbulenter quadratisch mit der Strömungsgeschwindigkeit (Abschnitt 4.1.6.1.2). Dabei zeigt sich, wie auch Versuche bestätigen, dass die *Rohrreibungszahl*  $\lambda$  der turbulenten Strömung von der REYNOLDS-Zahl *Re* und infolge des makroskopischen Mischungsvorganges

<sup>1)</sup> DARCY, Henry (1803 bis 1855), frz. Ingenieur.

(Abschnitt 3.3.2.2.1) zudem von der Rohrrauigkeit  $k$  abhängt. Während die normale Rauigkeit – sie wirkt turbulenzzeugend oder ablösend – bei laminarer Strömung ohne Einfluss ist, wirkt sie sich bei turbulenter Strömung wesentlich aus. Die außerhalb der laminaren Unterschicht liegenden Rauigkeitsspitzen wirken wie Stolperstellen (Abschnitt 3.3.4), welche die Turbulenz anfachend erhöhen und damit die Impulsaustauschgröße (Abschnitt 3.3.2.2.3) verstärken. Bei laminarer Strömung dagegen wirkt die Viskosität auf die Wanderhebungen glättend. Zweckmäßigerweise wird bei turbulenter Rohrströmung gesetzt:

$$\lambda = f(Re; D/k_s) \quad (4-26)$$

Es wird also nicht die Rauigkeit direkt, sondern die **inverse relative Rauigkeit**  $D/k_s$  als zweite Variable verwendet. Grund: Zweckmäßig, da sich für Quotient  $D/k_s$  größere Zahlen ergeben. Wegen der großen Mannigfaltigkeit der geometrischen Formen, Anordnungen und Abmessungen ist die Anzahl der Rauigkeitsparameter sehr groß und daher kaum bestimmbar. Deshalb musste eine Vergleichsgröße gefunden werden. Als Ersatzgröße für die *natürliche Rauigkeit* wurde von NIKURADSE die sog. **äquivalente Sandrauigkeit**, oder kurz **Sandrauigkeit**  $k_s$ , geschaffen. Die Sandrauigkeit wird künstlich durch Aufkleben einer geschlossenen Schicht von Sandkörnern gleicher Dicke  $k_s$  erzeugt. Dann gilt:

Ein Rohr mit der natürlichen Rauigkeit  $k$  hat den gleichen Rauigkeitswert wie ein Rohr mit der künstlichen Sandrauigkeit  $k_s$ , wenn es bei gleichen geometrischen Abmessungen, gleichem Volumenstrom und gleichem Medium den gleichen Druckverlust aufweist. Dann sind auch REYNOLDS- und Rohrreibungszahl jeweils gleich.

Bei technisch erzeugten Flächen durch Gießen, Walzen, Ziehen, Pressen, Bearbeiten usw. sind die sich zwangsläufigergebenden *absoluten Rauheiten*  $k$  regelmäßig. Dies gilt ungefähr auch für gleichmäßige Abnutzung oder Verschmutzung (Rost, Ablagerungen). Für derartige Oberflächen beträgt nach Versuchen die äquivalente

Sandrauigkeit  $k_s$  bis zum 1,6-fachen der vorhandenen absoluten Rauigkeit  $k$ . Für technisch erzeugte und gleichmäßig verschmutzte Flächen gilt deshalb:  $k_s = (1 \dots 1,6) \cdot k$ . Oft kann hier jedoch  $k_s \approx k$  gesetzt werden.

Verkleinern der Oberflächenrauigkeit lohnt sich zur Verlustminderung umso mehr, je höher die Strömungsgeschwindigkeit ist, da die turbulente Reibung proportional zu ihr ansteigt.

Tabelle 6-14 sowie Bild 6-44 enthalten die absoluten Rauigkeiten  $k$  für technisch wichtige Rohrmaterialien und Flächen unterschiedlicher Herstellung sowie verschiedenen Gebrauchszustandes.

Bemerkung:  $k \hat{=} R_t$  bzw.  $R_z$  gemäß DIN 4762.

Den durch umfangreiche Versuche ermittelten Verlauf der Rohrreibungszahl  $\lambda$  als Funktion der REYNOLDS-Zahl  $Re$  mit dem Kehrwert der relativen Rauigkeit  $D/k_s$  bzw.  $D/k$  als Parameter zeigt Bild 4-6 in prinzipieller Darstellung. Wegen des großen  $Re$ -Bereiches wird dieses sog. **Rohrreibungs-, COLEBROOK- oder MOODY-Diagramm** vorteilhaft in doppellogarithmischem Maßstab aufgetragen.

Bild 6-11 enthält ein ausführliches Arbeitsdiagramm, dessen Genauigkeit bei den meisten Anwendungsfällen ausreicht, um die Rohrreibungszahl  $\lambda$  zu bestimmen. „Computer benötigen jedoch Formeln“  $\rightarrow$  (4-27) bis (4-35).

Das Diagrammfeld lässt sich in die folgenden vier Kurven bzw. Bereiche aufteilen:

1. **Laminares Gebiet**,  $Re < Re_{kr}$ ,  $\lambda = f(Re)$
2. **Turbulentes Gebiet**,  $Re \geq Re_{kr}$ 
  - a) Glattes Verhalten;  $k_s \approx 0$ :  $\lambda = f(Re)$
  - b) Übergangsbereich  $\lambda = f(Re, D/k_s)$
  - c) Raues Verhalten  $\lambda = f(D/k_s)$

Die verschiedenen Bereiche sind durch folgende wichtige Merkmale gekennzeichnet:

1. **Laminares Gebiet** ( $Re < Re_{kr} = 2320$ )  
Die laminare Rohrströmung ist in Abschnitt 4.1.1.3.2 dargestellt. Als Ergebnis kann nochmals festgehalten werden: