

Kapitel 2

Beschreibung von Signalen im Zeitbereich

Zusammenfassung Wenn Signale messtechnisch erfasst worden sind, besteht die Aufgabe, sie als Zeitfunktionen darzustellen. Für Signale, die deterministisch beschreibbar sind, bieten sich dazu Reihendarstellungen an, die zur Approximation oder Interpolation der Messwerte dienen. Nach einer Einführung in wichtige Signaloperationen befasst sich dieses Kapitel mit verbreiteten Reihenentwicklungen für Signale. Danach wird auf Signale eingegangen, zu deren Beschreibung man auf statistische Kenngrößen zurückgreifen muss. Es wird dargestellt, wie sie anhand von Verteilungs- und Dichtefunktionen definiert und angewendet werden.

2.1 Signaloperationen

2.1.1 Operationen auf Signalmengen

Allgemeines

Da der Begriff des Signals praktisch synonym zu dem der Zeitfunktion verwendet wird, lassen sich Operationen, die auf Funktionen angewendet werden können, sofort auf Signale übertragen. Beispiele sind

- die Multiplikation eines Signals mit einer Konstanten und die Addition (Diese beiden Operationen ermöglichen die Linearkombination von Signalen.) sowie die Multiplikation zweier Signale,
- die Verschiebung eines Signals auf der Zeitachse um die Zeitdifferenz θ (Translation),
- Differentiation und Integration eines Signals, sofern die betreffende Ableitung bzw. das Integral existiert.

Die Operationen der ersten beiden Punkte sind nicht nur für zeitkontinuierliche Signale, sondern auch für zeitdiskrete Signale erklärt, wenn man

sie Abtastwert für Abtastwert anwendet. Dagegen sind die einstelligen Operationen der Differentiation und Integration auf zeitkontinuierliche Signale beschränkt.

Diese hier nur skizzierten Zusammenhänge sind in der systemtheoretischen Grundlagenliteratur ausführlich beschrieben; wir verweisen besonders auf WUNSCH/SCHREIBER [1].

In den Abschnitten 2.1.2 und 2.1.3 gehen wir auf zwei Signaloperationen ausführlicher ein, die in der Signal- und Systemtheorie eine besondere Bedeutung besitzen. Das ist zum einen die Abtastung, die aus der Klasse der zeitkontinuierlichen Signale in die Klasse der zeitdiskreten Signale führt, und zum anderen eine spezielle zweistellige Operation, die als Faltung bezeichnet wird.

Signalräume, Skalarprodukt und Norm

Bekanntlich bilden Mengen (hier: von Signalen) zusammen mit Operationen, die auf diesen Mengen definiert sind, algebraische Strukturen. Besondere Bedeutung besitzen Signalmengen, deren Elemente die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt < \infty \quad \text{für } p > 0, \text{ ganz} \quad (2.1)$$

erfüllen; sie bilden mit Addition und Multiplikation als innere Operationen und mit der Skalarmultiplikation als äußere Operation einen linearen Raum, der als $L^p(\mathbb{R})$ bezeichnet wird. Für die weiteren Betrachtungen interessieren besonders die Menge der quadratisch integrierbaren zeitkontinuierlichen Signale

$$L^2(\mathbb{R}) = \{x : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X} \mid \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}; \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty\} \quad (2.2)$$

sowie die Menge der quadratisch summierbaren zeitdiskreten Signale, die in entsprechender Weise eingeführt wird:

$$l^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X} \mid \mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}; \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\} \quad (2.3)$$

Das Skalar- oder Innenprodukt zweier Signale x, g ist für zeitkontinuierliche Signale als

$$\langle x, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g^*(t) dt, \quad (2.4)$$

für zeitdiskrete Signale als

$$\langle x, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) g^*(k) \quad (2.5)$$

definiert. Der Stern (*), der die Bildung der konjugiert komplexen Größe ausdrückt, ist natürlich bei den hier betrachteten reellwertigen Signalen überflüssig; wir werden aber auch die angegebene, allgemeinere Form für komplexwertige Funktionen benötigen. Für $x = g$ entsteht das Quadrat der sogenannten *Norm*,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle. \quad (2.6)$$

Interpretation der Norm. Energie- und Leistungssignale

Um zu zeigen, dass sich die L^2 -Norm physikalisch interpretieren lässt, nehmen wir an, ein zu betrachtendes Signal, das aus $L^2(\mathbb{R})$ stammt, sei eine Spannung u . Wird diese an einen Verbraucher angelegt, fließt ein Strom i , und die sog. Momentanleistung berechnet sich als

$$p(t) = u(t) \cdot i(t). \quad (2.7)$$

Das Integral über p beschreibt die Energie, die im Verbraucher in Wärme umgewandelt wird:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt \quad (2.8)$$

Da Spannung und Strom in bekannter Weise über den OHMSchen Widerstand R zusammenhängen, gilt ebenso

$$E = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt. \quad (2.9)$$

Der Vergleich mit der Definition der Norm zeigt, dass die Energie E des Signals u mit dem Quadrat seiner Norm übereinstimmt, sofern man als Widerstand einen *Einheitswiderstand* $R = 1 \Omega$ voraussetzt.

Diese Betrachtung ist nicht auf Spannung und Strom beschränkt. Die Energieaufnahme von physikalischen Systemen wird durch (2.8) allgemein beschrieben, wobei u für eine Differenzgröße (Spannung, Temperatur, Druck, ...) und i für eine Flussgröße (Strom, Wärmestrom, Volumenstrom, ...) steht. Diese Größen werden so gewählt, dass sie über einen (verallgemeinerten) Widerstand miteinander zusammenhängen, so dass dann (2.9) allgemein gilt [3, 4]. Es ist deshalb auch üblich, Signale aus $L^2(\mathbb{R})$ als *Energiesignale* mit der Signalenergie

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (2.10)$$

zu bezeichnen, wobei wir zu dem Symbol x für das Signal zurückgekehrt sind.

Es gibt allerdings auch zeitkontinuierliche Signale, die nicht zu $L^2(\mathbb{R})$ gehören. Das sind insbesondere:

- alle periodischen Signale, da deren mathematische Definition voraussetzt, dass die Fortsetzung der Grundperiode über die gesamte Zeitachse, also für $-\infty < t < +\infty$, erfolgt,
- wichtige Testsignale wie die Sprungfunktion (siehe Abschnitt 3.3.2),
- zeitlich unbegrenzte Rauschsignale, insbesondere alle Realisierungen stationärer Prozesse (siehe Abschnitte 2.3 und 3.5).

Für diese Signale ist die Angabe einer endlichen Signalenergie nicht möglich, und man charakterisiert sie deshalb durch die mittlere Energie pro Zeiteinheit, also ihre Leistung

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (2.11)$$

Dadurch, dass die Leistung auch hier wieder am Einheitswiderstand berechnet wurde, stimmt diese Definition mit dem später zu behandelnden Effektivwertquadrat des Signals überein. Signale, für die $0 < P < \infty$ gilt, heißen *Leistungssignale*.

Es gibt auch Zeitfunktionen, die weder Energie- noch Leistungssignale beschreiben. Das sind diejenigen Funktionen, bei denen die Normierung auf die Betrachtungsdauer $2T$ in (2.11) nicht ausreicht, um den Grenzübergang zu ermöglichen. Beispiele sind exponentiell ansteigende Signale, die Funktion $1/t$ und das weiße Rauschen (siehe 3.5.2).

Für zeitdiskrete Signale aus $l^2(\mathbb{Z})$ ist es naheliegend, auch deren Norm als Signalenergie zu betrachten. Die exakte Begründung wird als Gleichung (2.110) nachgeliefert.

2.1.2 Abtastung

Modellvorstellung

Wie schon erwähnt, erfolgt die messtechnische Erfassung (Abtastung) einer Zeitfunktion x punktweise, indem jeweils einem diskreten Zeitpunkt t' der Funktionswert $x(t')$ zugeordnet wird.

Für alle weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, dass der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Abtastzeitpunkten, das sog. *Abtastintervall*, konstant ist. Es soll mit Δt bezeichnet werden; sein Kehrwert ist dann die Abtastfrequenz f_A , die gerne auch als die zugehörige Kreisfrequenz ω_A ausgedrückt wird:

$$\boxed{f_A = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad \omega_A = \frac{2\pi}{\Delta t}} \quad (2.12)$$

Wenn nun ein zeitkontinuierliches Signal abgetastet wird, entsteht am Ausgang der im zeitlichen Abstand von Δt aktivierten Abtast- und Halteschaltung eine stufenförmige Funktion, die den gleichen Definitions- und Wertebereich wie die Originalfunktion hat, aber aufgrund der vielen Unstetigkeitsstellen nicht gut in die analoge Signalbeschreibung passt. Da diese stufenförmige Funktion durch ihre Amplitudenwerte in den Zeitpunkten $k\Delta t$ (k ganz) vollständig beschrieben ist, reduziert man die Beschreibung auf eben diese Zeitpunkte und erhält so die Modellvorstellung des zeitdiskreten Signals, das nur in den Abtastzeitpunkten definiert ist.

Aus der Sicht der zeitdiskreten Informationsverarbeitung entsteht auf diese Weise einfach eine Datenstruktur, die z. B. im Speicher eines Computers stehen und von dort durch den Prozessor abgerufen werden kann. Für die Zwecke der Signaltheorie ist es jedoch erforderlich, für diese Struktur einen geeigneten mathematischen Ausdruck zu finden. Am natürlichsten ist die Angabe als Folge, also einfach in der Form

$$(\dots, x((k-1)\Delta t), x(k\Delta t), x((k+1)\Delta t), \dots). \quad (2.13)$$

Es ist wünschenswert, statt dieser Folge einen geschlossenen Ausdruck angeben zu können, den man zum Beispiel als Integranden einsetzen kann. Man verwendet zu diesem Zweck die bekannte Delta-„Funktion“, die auch als DIRAC-Impuls bezeichnet wird, und stellt das Ergebnis der Abtastung in der Form

$$x_A(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \quad (2.14)$$

dar. Dadurch wird in jedem Abtastzeitpunkt $k\Delta t$ eine Kopie des DIRAC-Impulses positioniert, die mit dem zugehörigen Abtastwert $x(k\Delta t)$ gewichtet ist.

Wir nutzen wir die Gelegenheit, ab hier eine Schreibvereinfachung einzuführen. Wenn es keine Missverständnisse geben kann, lassen wir in Zukunft die explizite Angabe des Abtastintervalles in den Argumenten weg und schreiben $x(k)$ anstelle von $x(k\Delta t)$. Damit vereinfacht sich die letzte Gleichung zu

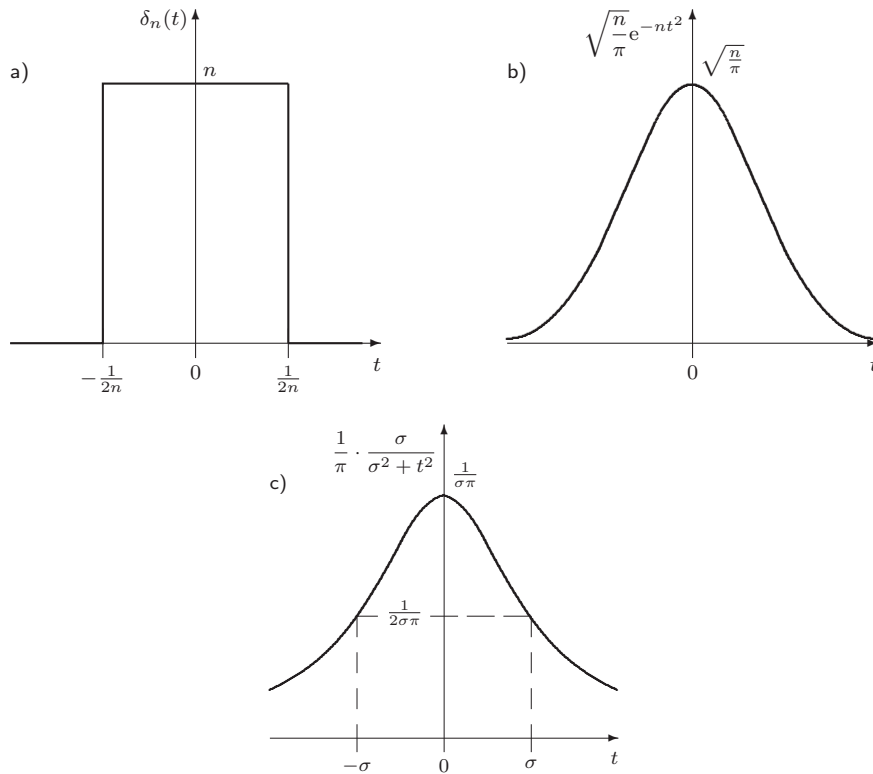


Abbildung 2.1 Drei Möglichkeiten der Darstellung eines schmalen Impulses mit Einheitsfläche: a) Rechteck-Impuls, b) GAUSS-Impuls, c) Ableitung des Arcustangens. – Bei a und b entsteht der DIRAC-Impuls durch $n \rightarrow \infty$, bei c durch $\sigma \rightarrow 0$.

$$x_A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(t - k\Delta t). \quad (2.15)$$

Dieser Ausdruck muss allerdings mit etwas Vorsicht verwendet werden, weil δ in der üblichen Definition

$$\delta(t) = 0 \quad : \quad t \neq 0 \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.16)$$

(aus der dann folgt, dass für $t = 0$ ein unendlicher Wert eingenommen werden muss) trotz des verbreiteten Sprachgebrauchs keine Funktion im klassischen Sinne ist. Dieser Fakt soll nachstehend diskutiert werden.

Der DIRAC-Impuls als Distribution

Offensichtlich liegt der Definition (2.16) die Vorstellung eines „unendlich schmalen“ Impulses mit Einheitsfläche zugrunde. Zur Herleitung geht man von einem Impuls mit dem Flächeninhalt von 1 aus, dessen Breite und Höhe durch einen Parameter n gesteuert werden können. Abbildung 2.1 zeigt drei ausgewählte Möglichkeiten, darunter auch den einfachsten Fall, ein Rechteck der Form

$$\delta_n(t) = \begin{cases} n : -\frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{2n} \\ 0 : \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.17)$$

Das erwünschte Ziel wird intuitiv durch die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = \delta(t) \quad (2.18)$$

zum Ausdruck gebracht. Diese Schreibweise ist zwar anschaulich, aber so nicht zulässig, denn es wird bei wachsendem n offensichtlich *kein* Grenzwert erreicht. Dagegen existiert sehr wohl der Grenzwert des folgenden Integrals:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) \phi(t) dt = \phi(0) \quad (2.19)$$

Bei dieser Betrachtung erscheint δ als Konstruktionsvorschrift für eine Abbildung der Funktion ϕ in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen bzw. allgemeiner in die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Integrale dieses Typs, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi(t) dt = (f, \phi) \in \mathbb{C}, \quad (2.20)$$

nennt man (stetige lineare) Funktionale¹. Natürlich sind an die Funktion ϕ gewisse Voraussetzungen zu knüpfen, die aber recht weit sind und hier nicht besprochen werden müssen. Wesentlich ist die Erkenntnis, die wir beispielhaft anhand des Einheitsimpulses gewonnen haben, nämlich dass in dem Funktional (2.20) das Symbol f nicht nur für eine Funktion stehen muss. Diese Erweiterung des Funktionsbegriffes nennt man *Distribution*. Damit lässt sich δ als die durch

$$\boxed{(\delta, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0)} \quad (2.21)$$

erklärte Distribution beschreiben.

¹ Wenn f komplexwertig ist, ist in (2.20) $f(t)$ durch $f^*(t)$ zu ersetzen.

Für Distributionen lassen sich Rechenregeln formulieren, mit deren Hilfe u. a. viele Ableitungen im Zusammenhang mit der FOURIER-Transformation zwanglos erfolgen können [5]. Die Wirkung der wichtigen Gleichung (2.21) wird gerne mit „Ausblend- oder Filtereigenschaft des DIRAC-Impulses“ umschrieben. Die praktische Bedeutung besteht darin, dass man Integrale vom angegebenen Typ ganz einfach löst, indem man den Wert des Integranden ϕ an der Stelle angibt, an der sich der DIRAC-Impuls befindet.

Einen Spezialfall stellt die Auswahl eines Signalwertes aus einer Zeitfunktion x in der Form

$$x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt \quad (2.22)$$

dar. Insbesondere lässt sich für $\tau = k \cdot \Delta t$ die Erzeugung eines einzelnen Abtastwertes sauber mit Hilfe eines Funktionalen beschreiben:

$$x(k) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - k\Delta t) dt \quad (2.23)$$

Da man aus Distributionen auch neue Distributionen bilden kann, wird deutlich, dass die Summe (2.15) ebenfalls eine Distribution darstellt und nur in diesem Sinne verwendet werden darf. Der Integrand von (2.23) ist bereits ein Beispiel für diese Verwendung, denn er stellt einen Summanden aus x_A dar. Die Distribution x_A wird uns daher gerade dann gute Dienste leisten, wenn in Transformationsformeln (beispielsweise im FOURIER-Integral) ein zeitkontinuierliches Signal x durch sein zeitdiskretes Pendant ersetzt werden soll (Abschnitte 2.2.2 mit (2.80), 3.2.5 mit (3.35), 3.3.3 mit (3.122)).

Impulsfläche und weitere Besonderheiten

Die Einführung des DIRAC-Impulses erfolgte allgemein anhand dimensionsloser Größen, wie das in der Mathematik üblich ist. Da eine gewisse Verwirrung entstehen kann, wenn die unabhängige Variable t dimensionsbehaftet ist (bei unserer Interpretation mit der Dimension der Zeit), wollen wir die folgende Betrachtung einfügen.

Grundforderung ist, dass das Integral unter (2.16) den Wert 1 liefert. Hat t die Einheit s, muss $\delta(t)$ die Einheit s^{-1} haben, damit das Integral dimensionslos bleibt. Unsere Formalisierung der Abtastung mit Hilfe von Distributionen bleibt dabei richtig: Haben die Abtastwerte $x(k\Delta t)$ der Folge (2.13) zum Beispiel die Einheit V, haben die Werte $x_A(t)$ der Distribution (2.15) die Einheit Vs^{-1} . Die daraus mit (2.23) zurückgewonnenen Abtastwerte haben wieder die Einheit V.

Besondere Aufmerksamkeit ist in folgendem Fall erforderlich: In dem Funktional (2.20) möge f die Einheit V haben und ϕ dimensionslos sein. Das Er-

gebnis (f, ϕ) hat dann die Einheit Vs. Steht nun, wie in Gleichung (2.21), anstelle von f der DIRAC-Impuls mit der Einheit s^{-1} , ist das Ergebnis (δ, ϕ) dimensionslos. Mit dieser Besonderheit werden wir konfrontiert werden, wenn wir bei der spektralen Signalbeschreibung von zeitkontinuierlichen zu zeitdiskreten Signalen übergehen.

Bei der näherungsweise praktischen (messtechnischen) Realisierung eines DIRAC-Impulses muss man natürlich dimensionsbehaftete physikalische Größen (Spannung, Kraft o. ä.) verwenden. Unser Problem ist dabei jetzt nicht, dass man den Impuls in der Praxis nicht beliebig schmal machen kann; darauf gehen wir später ein (vgl. Abbildung 3.26). Hier ist von Bedeutung, dass man eine *Impulsfläche* I einführen muss, um einen dimensionsbehafteten Impuls ausdrücken zu können. So kann man zum Beispiel einen Spannungsimpuls

$$\delta^{(u)}(t) = I^{(u)} \cdot \delta(t) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(u)}(t) dt = I^{(u)} \quad (2.24)$$

einführen, wobei die folgenden Maßeinheiten gelten:

$$[\delta^{(u)}(t)] = \text{V}, \quad [I^{(u)}] = \text{Vs}, \quad [\delta(t)] = s^{-1} \quad (2.25)$$

Die Forderung, dass das Integral über $\delta(\cdot)$ unabhängig vom Argument immer 1 ist, führt zu einer weiteren Besonderheit, die dann auftritt, wenn man das Argument mit einem konstanten Faktor multipliziert. Beispielsweise sei $a \cdot t = \vartheta$. Aus der Begründung

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta) d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta) \cdot a dt \quad (2.26)$$

liest man ab, dass

$$\boxed{\delta(t) = a \cdot \delta(at) = a \cdot \delta(\vartheta)} \quad (2.27)$$

gilt. Dieser Zusammenhang wird häufiger benötigt, wenn man den DIRAC-Impuls nicht im Zeit-, sondern im Frequenzbereich verwendet, da dort das Argument öfter zwischen Frequenz f , Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ (3.81) und normierter (Kreis-) Frequenz $\Omega = \omega \Delta t$ (3.128) wechselt:

$$\boxed{\delta(f) = 2\pi \cdot \delta(\omega) = 2\pi \Delta t \cdot \delta(\Omega)} \quad (2.28)$$

Schließlich erwähnen wir noch die nützliche Beziehung

$$\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t), \quad (2.29)$$

die sich aus dem einfachen Umstand ergibt, dass der DIRAC-Impuls nur dort von Null verschieden ist, wo sein Argument verschwindet.

2.1.3 Faltung

Linearität zeitkontinuierlicher Systeme

Die Faltungsoperation, der wir uns nun widmen wollen, erscheint zunächst kompliziert, ist aber sehr wichtig, so dass wir sie gründlich erläutern wollen. Am häufigsten begegnet sie uns bei der Beschreibung des Verhaltens linearer Systeme, das uns deshalb als einführendes Beispiel dienen soll. Da uns lineare Systeme an verschiedenen Stellen wiederbegegnen werden, soll zunächst skizziert werden, was man unter einem linearen System versteht. Wir beschränken uns auf zeitkontinuierliche Systeme mit jeweils einem Eingang und einem Ausgang. Das Eingangssignal sei x wie bei (1.2), das Ausgangssignal y .

Am einfachsten verhalten sich *statische* Systeme, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie keine Speicherelemente (in passiven elektrischen Schaltungen also keine Kapazitäten und Induktivitäten) enthalten. Bei ihnen erzeugt ein bestimmter Eingabewert $x(t)$ immer einen bestimmten Ausgabewert $y(t)$, unabhängig vom gerade betrachteten Zeitpunkt t . Man kann also eine Systemabbildung Φ angeben, die jedem Wert des Eingabealphabetes \mathcal{X} einen Wert aus dem Ausgabealphabet \mathcal{Y} zuordnet:

$$\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}; \quad (2.30)$$

$$y(t) = \Phi(x(t)); \quad x(t) \in \mathcal{X}; \quad y(t) \in \mathcal{Y}$$

Ein statisches System heißt nun *linear*, wenn für die Systemabbildung Φ die folgende Superpositionsregel gilt:

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t) \\ &= a_1 \cdot \Phi(x_1(t)) + a_2 \cdot \Phi(x_2(t)) \\ &= \Phi(a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)); \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$y_1(t), y_2(t) \in \mathcal{Y}; \quad x_1(t), x_2(t) \in \mathcal{X}; \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Im Gegensatz zu den statischen Systemen besitzen *dynamische* Systeme Elemente mit Speichereigenschaften („Gedächtnis“), die dazu führen, dass ein bestimmter Wert des Eingabesignals x zu unterschiedlichen Zeiten in der Regel zu unterschiedlichen Werten des Ausgabesignals y führt. Ein solches Verhalten lässt sich nicht mehr mit einer sog. Alphabetabbildung (2.30) beschreiben, sondern man benötigt nun eine *Signalabbildung*, die jedem Element aus der Menge aller möglichen Eingabesignale (1.2), die man kurz als \mathcal{X}^T bezeichnet, ein Element aus der Menge \mathcal{Y}^T aller möglichen Ausgabesignale zuordnet. Wie diese Abbildung, die wir mit Φ bezeichnen wollen, beschaffen ist, erschließt sich am besten, indem man sog. Zustandsvariable zur Beschreibung der Speicherelemente des dynamischen Systems einführt. Jedes der n Speicherelemente wird durch ein Zustandssignal z_i beschrieben ($i = 1, \dots, n$).