2 Bernoulli'sche Gleichung für stationäre Strömung

In den Kapiteln 2 und 3 machen wir Gebrauch von den grundlegenden Erhaltungssätzen der Mechanik für Energie, Impuls und Drehimpuls. Diese Sätze gelten für abgeschlossene Systeme.

2.1 Herleitung

Der Druckverlauf normal zu den Stromlinien wird durch die Krümmungsdruckformel Gl. (1.8) erfasst. Für praktische Anwendungen viel wichtiger ist der Druckverlauf *längs* der Stromlinie, welcher durch die Bernoulli'sche Gleichung beschrieben wird (*Daniel Bernoulli*, 1700–1782). Diese stellt den zentralen Teil der elementaren Strömungslehre dar. Wegen ihrer Wichtigkeit werden wir zwei verschiedene Herleitungen erörtern. Bis auf Weiteres setzen wir Ideales Fluid voraus.

a) Herleitung aus dem Satz der Erhaltung der Energie

Wir knüpfen an den freien Fall in der Festkörperdynamik an und setzen auch hier Reibungsfreiheit voraus. Beim Fall verwandelt sich stetig potentielle Energie E_p (Energie der Lage) in kinetische Energie E_k, woraus bekanntlich die einfache Formel für die Fallgeschwindigkeit w_F resultiert:

$$w_\mathrm{F} = \sqrt{2\,g\,H}$$

H ist die durchfallene Höhe, Bild 2-1a. Die Energieumsetzung ist in einem Diagramm in Bild 2-1a angedeutet. Die potentielle Energie nimmt linear mit der Höhe h zu, die kinetische Energie dagegen ab. Am Startpunkt in der Höhe H ist diese gleich Null. Die Summe bleibt nach dem Satz der Erhaltung der Energie konstant.

In Bild 2-1b ist im Vergleich dazu eine stationäre Strömung dargestellt: ein oben offenes Gefäß mit großem Querschnitt mündet unten in einer Ausflussdüse. Gesucht ist zunächst die Ausflussgeschwindigkeit w_2. Wir fassen Gefäß und Düse als Stromröhre auf. Das Flüssigkeitsniveau werde durch einen Überlauf konstant gehalten. Denken wir uns den Zulauf für eine kurze Zeitspanne Δt blockiert, so fehlt oben eine Masse Δm_1 welche gleich groß ist wie die in Δt unten ausgeflossene Masse Δm_2.

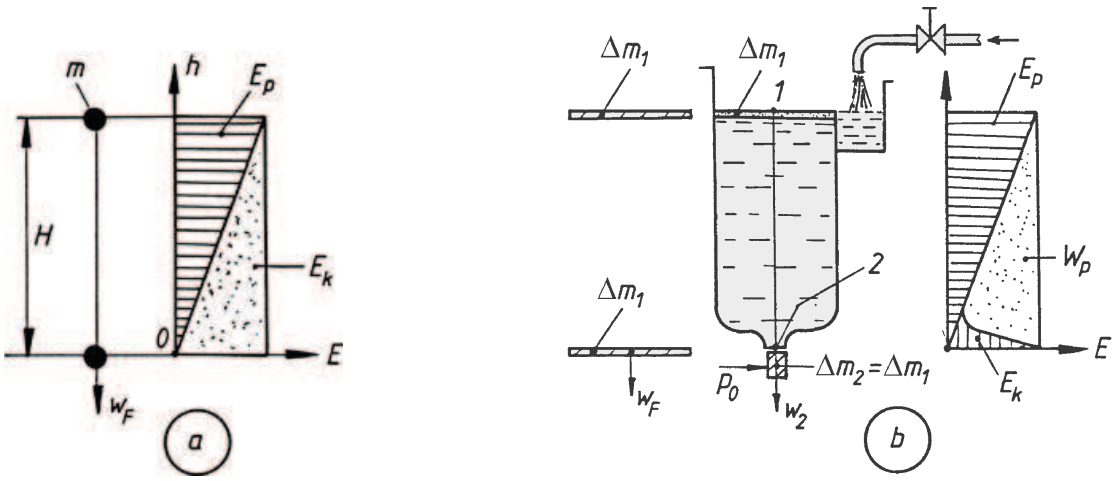


Bild 2-1 Vergleich von freiem Fall und Ausfluss aus einem Behälter; Kontrollpunkte 1 und 2

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014
L. Böswirth, S. Bschorer, *Technische Strömungslehre*, DOI 10.1007/978-3-658-05668-1_2

Energiemäßig ändert sich nichts, wenn wir uns den Behälter an der Düse abgesperrt denken, Δm_1 „beiseite ziehen" und die Höhe H durchfallen lassen: Die Austrittsgeschwindigkeit w_2 muss daher ebenso groß sein wie die Fallgeschwindigkeit, nämlich

$$w_\mathrm{F} = w_2 = \sqrt{2\,g\,H}\,. \tag{2.1}$$

Der Unterschied zur stationären Strömung ist der, dass beim freien Fall eine *identische* Masse Δm_1 seine potentielle Energie verliert und dafür kinetische Energie erhält, während beim Strömungsvorgang der gesamte Behälterinhalt potentielle Energie verliert und stellvertretend die Masse Δm_2 alle kinetische Energie erhält.

Will man – wie beim freien Fall der Festkörpermechanik – einen Erhaltungssatz auch für die *Zwischenzustände* formulieren, so muss man eine dritte, vermittelnde, Energieart einführen, die sog. Druckenergie W_p, Bild 2-1b. Am Ausfluss wandelt sich dann die Druckenergie in kinetische Energie um.

Ein Teilchen, das im Verlaufe des stationären Strömungsvorgangs im Behälter langsam absinkt, verliert stetig seine potentielle Energie, ohne dass ein Gegenwert an kinetischer Energie auftreten würde (der Behälterquerschnitt sei so groß, dass die kinetische Energie entsprechend der Absinkgeschwindigkeit vernachlässigbar sei); hingegen steigt der Druck entsprechend dem hydrostatischen Grundgesetz und damit die Druckenergie, so dass die Summe konstant bleibt. Am Ausfluss wandelt sich dann Druckenergie in kinetische Energie um, Bild 2-1b.

Quantitativ ist die Druckenergie W_p wie folgt definiert: W_p ist jene Arbeit, die man benötigt, um eine Masse Δm (in einem stationären Strömungsvorgang) von einem Bezugsdruck p_0 in einen Raum mit dem Druck p_1 einzubringen, Bild 2-2. Die aufgebrachte Druckarbeit setzt sich offensichtlich auf der anderen Seite des Behälters direkt in kinetische Energie um. Es ist mit $\Delta m = A\,s\,\rho = V\rho$

$$W_\mathrm{p} = F \cdot s = (p_1 - p_0)\,A \cdot s = (p_1 - p_0)\,A \cdot \frac{V}{A} = (p_1 - p_0)V = (p_1 - p_0) \cdot \frac{\Delta m_1}{\rho}$$

In der Strömungslehre ist es üblich, mit *spezifischen* Energien (bezogen auf 1 kg Fluid) zu rechnen (Einheit: Nm/kg):

$$w_\mathrm{p} = \frac{W_\mathrm{p}}{\Delta m} = \frac{p_1 - p_0}{\rho} \tag{2.2}$$

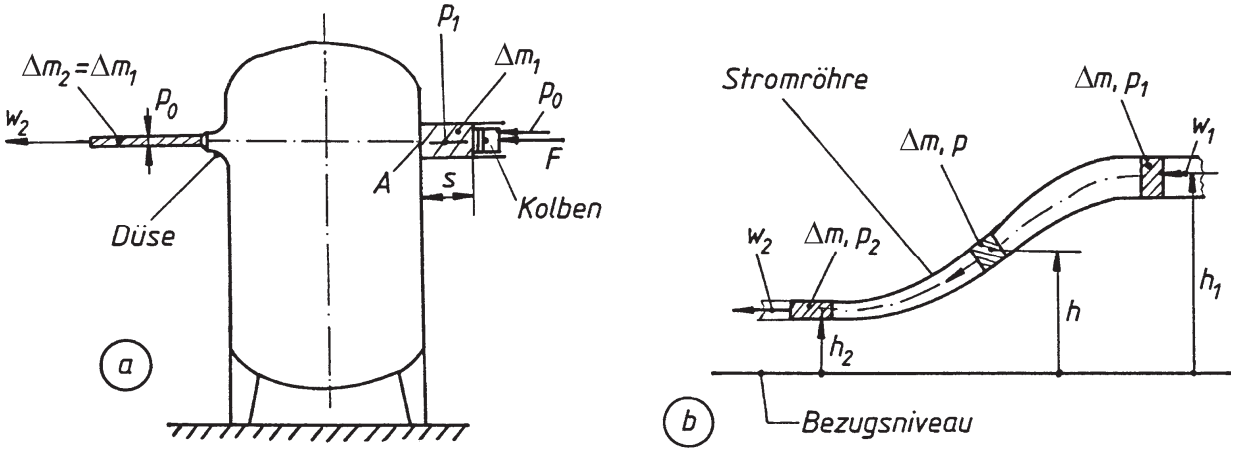


Bild 2-2 a Zur Druckenergie; **b** zur Bernoulli'schen Gleichung

Energiemäßig ist es offensichtlich gleichgültig, ob ein Kolben oder nachströmendes Fluid die Masse Δm_1 in den Behälterraum einpresst. Eine gleich große Masse $\Delta m_2 = \Delta m_1$ wird durch die Düse den Behälter mit der Geschwindigkeit w_2 verlassen. Der Satz der Erhaltung der Energie liefert:

$$W_\mathrm{p} = E_{\mathrm{K},2} = \frac{1}{2}\Delta m_2\, w_2^2 = (p_1 - p_0)\frac{\Delta m_1}{\rho}\,; \quad \Delta m_2 = \Delta m_1$$

$$\frac{p_1 - p_0}{\rho} = \frac{1}{2} w_2^2$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_0)}{\rho}} \tag{2.3}$$

Wieder erhält nicht die identische Masse Δm_1, an der die Arbeit W_p verrichtet wurde, die kinetische Energie, sondern die Masse Δm_2 (= Δm_1) an der Düse. Der Druck im Behälter tritt wieder vermittelnd zwischen Δm_1 und Δm_2 auf.

Wegen der stationären Strömung erhält Δm_1 jedoch zeitverschoben später eine ebenso große kinetische Energie.

Bei unserer Betrachtung hatten wir zunächst die kinetische Energie $E_{\mathrm{K},1}$ vernachlässigt. Berücksichtigt man diese, so ergibt der Satz der Erhaltung der Energie:

$$W_\mathrm{p} + E_{\mathrm{K},1} = E_{\mathrm{K},2} \rightarrow \frac{1}{2} w_2^2 = \frac{p_1 - p_0}{\rho} + \frac{1}{2} w_1^2$$

$$w_2 = \sqrt{2(p_1 - p_0)/\rho + w_1^2} \tag{2.3a}$$

Im Behälter nach Bild 2-1b erhält ein Fluidteilchen beim Absinken durch Eintreten in Gebiete höheren Druckes von der potentiellen Energie nachrückender Teilchen Druckenergie übertragen und damit die Fähigkeit, kinetische Energie an der Düse zu erzeugen.

Wir können uns nun Anordnungen nach Bild 2-1b und Bild 2-2a überlagert denken und gelangen so zum allgemeinen Fall nach Bild 2-2b. Der Satz der Erhaltung der Energie verlangt, dass die Summe der drei Energiearten in Punkt 1 gleich groß ist wie in Punkt 2. Da wir uns die Stromröhre an beliebiger Stelle abgeschnitten und in einen Raum konstanten Druckes mündend denken können, gilt die Energiekonstanz nicht nur für die Punkte 1 und 2, sondern für alle Punkte.

Einen Überblick über die drei Energiearten und ihre Berechnung gibt die folgende Aufstellung.

	für m kg, Nm	spezifische Energie für 1 kg; Nm/kg
potentielle Energie	$E_\mathrm{p} = m\, g\, h$	$e_\mathrm{p} = g\, h$
kinetische Energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m\, w^2$	$e_\mathrm{k} = \frac{1}{2} w^2$
Druckenergie	$W_\mathrm{p} = \frac{m}{\rho}(p - p_0)$	$w_\mathrm{p} = (p - p_0)/\rho$
Gesamtenergie	$E_\mathrm{g} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{K} + W_\mathrm{p}$	$e_\mathrm{g} = e_\mathrm{p} + e_\mathrm{K} + w_\mathrm{p}$

Es muss nur die *spezifische* Gesamtenergie *aller* Teilchen in der Stromröhre gleich groß sein; ein Teilchen mit *mehr* Masse hat natürlich proportional *mehr* Energie.

Die Bernoulli'sche Gleichung kann nun in Worten wie folgt formuliert werden:

> Jedes Teilchen in einer Stromröhre hat denselben Wert der spezifischen Gesamtenergie. Oder:
>
> Die Gesamtenergie eines Teilchens auf seinem Weg in einer Stromröhre bleibt konstant. Die Gesamtenergie setzt sich aus den Anteilen potentielle Energie, kinetische Energie und Druckenergie zusammen. Durchläuft ein Teilchen eine Stromröhre, so ändern sich diese Anteile ständig, ihre *Summe* bleibt aber konstant.

Bei der letzten Formulierung verfolgt man ein identisches Teilchen auf seinem Weg. Da nicht verschiedene Teilchen verglichen werden, kann einfach von der Erhaltung der Gesamtenergie gesprochen werden, eine Einschränkung auf die *spezifische* Energie ist nicht erforderlich. Für die praktische Anwendung ist es unzweckmäßig von einem Teilchen mit bestimmter Masse m auszugehen; hier benutzt man besser spezifische Energien. Man kann sich die Teilchen dabei beliebig klein vorstellen und die Bernoulli'sche Gleichung letztlich auch auf eine *Stromlinie* beziehen (nicht auf eine Stromröhre). Es gilt dann für alle Punkte auf einer Stromlinie (Bild 2-2b):

$$w_\mathrm{p} + e_\mathrm{k} + e_\mathrm{p} = \frac{p - p_0}{\rho} + \frac{1}{2} w^2 + g\,h = C \qquad C \text{ ... Konstante} \tag{2.4}$$

Eine Anordnung wie in Bild 2-1b dargestellt kann dann energiemäßig wie folgt beschrieben werden: im obersten Punkt des Behälters besteht die Gesamtenergie nur aus potentieller Energie. Beim Absinken des Teilchens verwandelt sich diese sukzessive in Druckenergie, welche sich dann im Düsenbereich voll in kinetische Energie umwandelt.

b) Herleitung aus dem Newton'schen Grundgesetz

Betrachten wir eine kleine Masse dm (Massenelement) in einer horizontalen Stromröhre, Bild 2-3a.

Das universell gültige Newton'sche Grundgesetz beschreibt auch die Bewegung des Massenelementes dm: Kraft = Masse × Beschleunigung:

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{res,x}} = \mathrm{d}m \cdot a \tag{2.5}$$

An Kräften sind wirksam:

dF_p ... resultierende Druckkraft in horizontaler Richtung
dF_G = d$m \cdot g$ = d$V \cdot \rho \cdot g$ ... Gewichtskraft, vertikal
dF_τ = 0 ... Reibungskraft, hier null, da Ideales Fluid

dF_p resultiert aus der Tatsache, dass sich das Teilchen in einer Umgebung befindet, in der der Druck in Strömungsrichtung zunimmt. Bei allseitig gleichem Druck wäre dF_p = 0. Um dF_p zu berechnen, erinnern wir uns an das Auftriebsgesetz aus der Hydrostatik: Auftriebskraft = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit (siehe auch Kap.1.3). Der Auftrieb entsteht aus der Tatsache,

dass der Druck nach unten hin (linear) zunimmt. Die verallgemeinerte Formel für die Auftriebskraft F_A lautet (vgl. Bild 2-3b):

$$F_A = -\frac{dp}{dh} \cdot V \tag{2.6}$$

Diese Formel gestattet ganz allgemein die resultierende Druckkraft auf einen Körper zu berechnen, der sich in einem Fluid mit linear ansteigendem Druck befindet. Das bekannte Auftriebsgesetz ergibt sich daraus durch Einsetzen des hydrostatischen Grundgesetzes:

$$p = p_0 + \rho_F g h \qquad \frac{dp}{dh} = \rho_F g \qquad |F_A| = + \rho_F g V$$

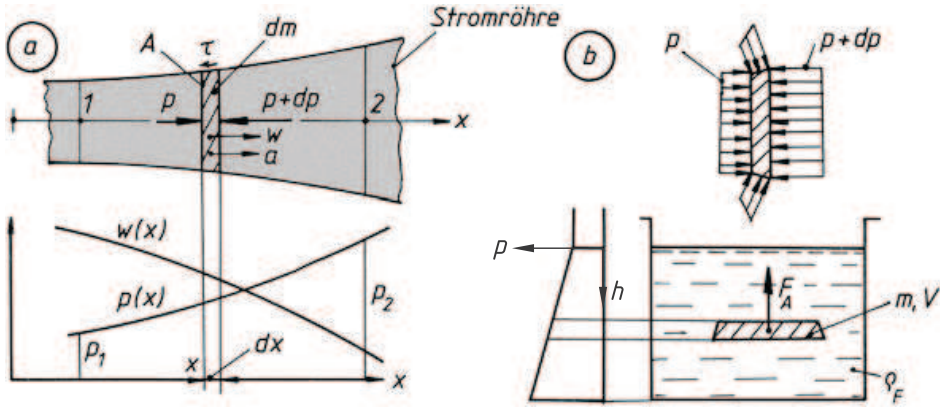


Bild 2-3 Zur Herleitung der Bernoulli'schen Gleichung

Angewendet auf unsere Situation ergibt sich:

$$dF_p = -\frac{dp}{dx} \cdot dV \ ^{1)} \tag{2.7}$$

Für das kleine Wegstück dx kann die Druckverteilung als linear angesehen werden; keinesfalls muss für Gl. (2.7) insgesamt linearer Druckverlauf gefordert werden. Zur Ermittlung der Beschleunigung a machen wir folgende Überlegungen:

$$w = w\,(x)$$

stelle den Geschwindigkeitsverlauf als Funktion des Ortes x dar, vgl. auch Bild 2-3a. An einem festen Ort bleibt die Geschwindigkeit konstant, was gleichbedeutend mit der Definition einer stationären Strömung ist. Nur bei einer instationären Strömung ändert sich in einem raumfesten Punkt die Geschwindigkeit. Die daraus resultierende Beschleunigung wird in der Mechanik als *lokale* Beschleunigung bezeichnet. Zur Anwendung des Newton'schen Grundgesetzes dürfen wir aber nicht einen raumfesten Punkt ins Auge fassen, sondern unser *strömendes* Teilchen. Die Beschleunigung a des Teilchens resultiert daraus, dass es im Verlaufe

---

[1] dF_p enthält auch einen Anteil, der von der Druckkraft auf die konische Mantelfläche des Elementes herrührt.

der Bewegung in Gebiete höherer (oder niedrigerer) Geschwindigkeit gelangt, w hängt implizit von der Zeit t ab. Es wird nach der Kettenregel der Differenzialrechnung

$$w = w[x(t)] \qquad a = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dw}{dx} \cdot w \tag{2.8}$$

Diese Beschleunigung wird auch als *konvektive* Beschleunigung bezeichnet. In stationärer Strömung haben die Teilchen nur konvektive Beschleunigungen. In instationärer Strömung setzt sich die *totale* Beschleunigung aus einem lokalen und einem konvektiven Anteil zusammen. Nun können wir unsere Ergebnisse Gl. (2.7) und Gl. (2.8) in Gl. (2.5) einführen:

$$-\frac{dp}{dx} \cdot dV = \rho\, dV \cdot w \cdot \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho w \cdot \frac{dw}{dx} \quad \text{oder} \qquad dp = -\rho w \cdot dw$$

Bewegungsgleichung längs Stromlinie (x)
Differenzialform

(2.9)

Aus Gl. (2.9) ersieht man, dass Geschwindigkeits*zunahme* (+ dw) immer *Druckabnahme* (dp negativ) zur Folge hat und umgekehrt. Gl. (2.9) gilt auch für veränderliche Dichte. Nehmen wir ρ als konstant, so kann Gl. (2.9) sofort integriert werden:

$$p(x) = -\rho \cdot \frac{w^2(x)}{2} + C$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} w^2 = C \tag{2.10}$$

Fassen wir zwei Punkte 1, 2 ins Auge, Bild 2-3a, so kann die Konstante C eliminiert werden und es ergibt sich

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} w_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} w_2^2 \,. \tag{2.11}$$

Unsere Ableitung war insofern nicht allgemein, als wir eine Stromröhre mit horizontaler Achse vorausgesetzt hatten. Betrachten wir nun eine Stromröhre mit schräger Lage, Bild 2-4. Wenn wir von der Koordinate x zur Koordinate s übergehen, ändert sich nichts Wesentliches, außer dass die Gewichtskraft dF_G eine Komponente in s-Richtung hat.

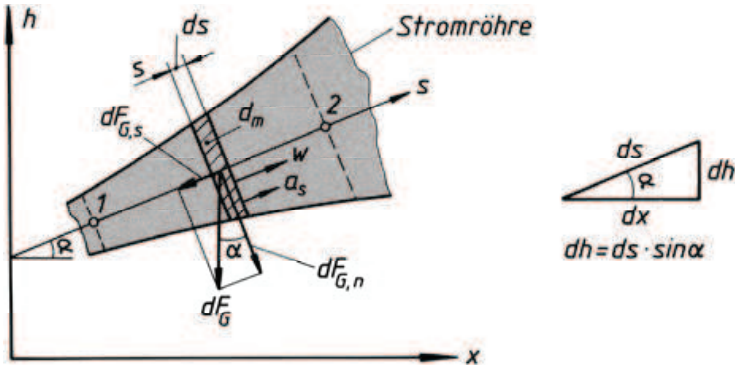


Bild 2-4
Verhältnisse bei zur x-Achse geneigter Stromröhre

Wenn wir den Winkel zwischen positiver x-Achse und positiver s-Achse mit α bezeichnen, gilt:

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{G,s}} = -\,\mathrm{d}F_{\mathrm{G}} \cdot \sin\alpha = -\,\mathrm{d}V \cdot \rho\, g \sin\alpha$$

Bei analoger Argumentation wie bei horizontaler Stromröhre ergibt sich

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{res,s}} = \mathrm{d}m\, a_{\mathrm{s}}$$

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} \cdot \mathrm{d}V - \mathrm{d}V \cdot \rho\, g \sin\alpha = \rho\, \mathrm{d}V \cdot w \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + \rho\, g \sin\alpha = -\rho\, w \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + (g \sin\alpha) \cdot \mathrm{d}s + w \cdot \mathrm{d}w = 0$$

Da $\mathrm{d}s \cdot \sin\alpha = \mathrm{d}h$ (vgl. Bild 2-4 rechts), ergibt Integration analog zu Gl. (2.11)

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} w_1^2 + g\, h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} w_2^2 + g\, h_2 = \text{const.}} \tag{2.12}$$

Dies ist die Bernoulli'sche Gleichung für stationäre Strömung. Man erkennt sogleich, dass diese Gleichung gültig bleibt, wenn man das Bezugsniveau für die Höhe h ändert und auch wenn man den Bezugsdruck, von dem weg man p misst, ändert. Es werden dann rechts und links nur gleich große Summanden hinzu addiert; die Konstante ändert sich zwar, aber die Gleichung bleibt gültig.

Gl. (2.12) bleibt auch gültig, wenn die Achse der Stromröhre gekrümmt ist. s ist dann einfach die Koordinate auf der gekrümmten Mittellinie der Stromröhre und die Integration erfolgt dann nach dieser Koordinate.

Bei gekrümmter Stromlinie ändert sich der Druck allerdings auch normal zu den Stromlinien (Krümmungsdruckformel Gl. (1.8)). Die Bernoulli'sche Gleichung bleibt davon unberührt, sie bezieht sich nur auf die Energie.

Der Umstand, dass wir die Bernoulli'sche Gleichung einmal aus dem Satz der Erhaltung der Energie und einmal aus dem Newton'schen Grundgesetz ableiten konnten, ist mit dem strengen Hierarchieprinzip im Bereich der Naturgesetze nicht in Widerspruch. Der Satz von der Erhaltung der Energie beruht selbst auf nichts anderem als auf dem Wegintegral des Newton'schen Grundgesetzes (bei Reibungsfreiheit). In der Ableitung ist dieses Wegintegral mit enthalten.

2.2 Druckbegriffe bei strömenden Fluiden

a) *Der statische Druck*

Denken wir uns ein kleines Kügelchen (derselben Dichte wie das Fluid) im Fluid suspendiert und ohne Relativbewegung mitschwimmend. Oft spricht man in diesem Zusammenhang auch von einem mitschwimmenden „Beobachter". Dieses Teilchen ruht gewissermaßen im umgebenden Fluid und gemäß dem Pascal'schen Gesetz wirkt auf das Teilchen von allen Seiten der

gleiche Druck. In Abschnitt 1.3 haben wir diese Regel näher begründet. Diesen Druck meint man, wenn man vom *Druck in einem strömenden Fluid* spricht. Will man diesen Druck betont von anderen Druckbegriffen abgrenzen, fügt man das Eigenschaftswort „statisch" hinzu: Symbole: p, p_{stat}. Der statische Druck ist auch jener Druck, der in der Bernoulli'schen Gleichung vorkommt. Außer durch einen mitschwimmenden Beobachter (was praktisch sehr schwierig wäre!) kann der statische Druck an einem bestimmten Ort einer Strömung auch von einem ruhenden Beobachter gemessen werden, wenn er seine Manometeröffnung normal zu den Stromlinien hält und im Übrigen die Strömung durch die Sonde möglichst wenig gestört wird, Bild 2-5, links.

Meist interessiert man sich für den statischen Druck an bestimmten Stellen einer Körperoberfläche oder in einem Rohr. Hier genügen sorgfältig entgratete Wandanbohrungen zur Druckentnahme, Bild 2-5, links und rechts unten.

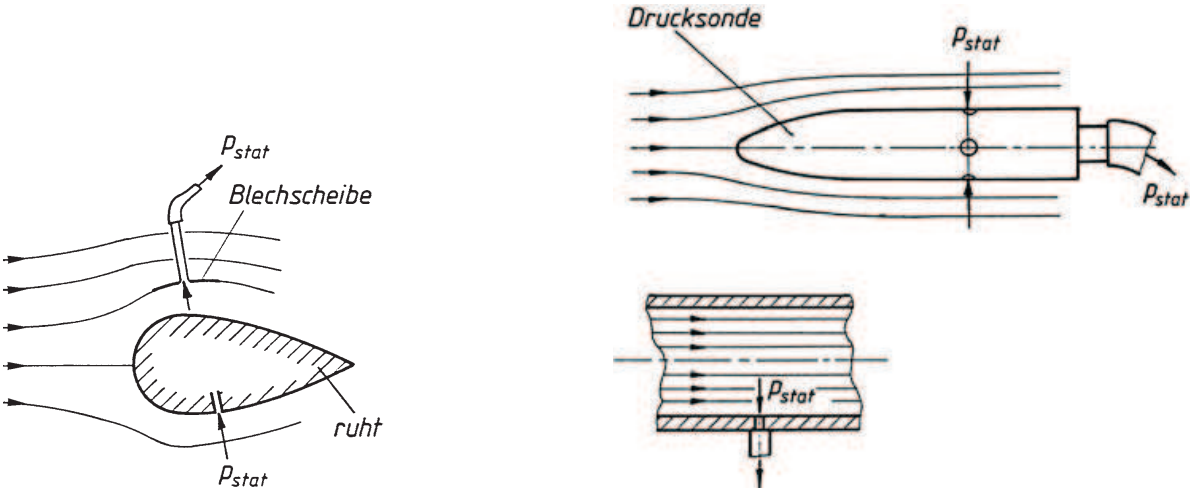


Bild 2-5 Zur Messung des statischen Druckes

b) *Gesamtdruck*

Der Gesamtdruck kann von einem gegen die Strömungsrichtung gehaltenen Hakenrohr, dem sog. **Pitotrohr** (gesprochen Pitó) gemessen werden, Bild 2-6.

Es ist immer $p_{ges} > p_{stat}$. Den genauen Zusammenhang ergibt die Bernoulli'sche Gleichung.

Vor jedem umströmten Körper bildet sich vorne ein sog. Staupunkt (S in Bild 2-6, vgl. auch Bild 1-4), in dem sich die Stromlinien verzweigen und die Strömungsgeschwindigkeit sich zum Wert $w = 0$ aufstaut. Bei axial angeströmten Rotationskörpern ist der vordere Durchstoßpunkt der Rotationsachse auch der Staupunkt S. In S hat die Stromlinie 90°-Knicke.

Dass dort die Geschwindigkeit auf null abnehmen muss, ist sofort aus der Krümmungsdruckformel Gl. (1.8) einsichtig: da im Knickpunkt der Krümmungsradius der Stromlinie $R = 0$ wird, ergibt sich dort $\mathrm{d}p/\mathrm{d}n = \infty$, ausgenommen für den Sonderfall, dass dort $w = 0$ ist. Unendlich große Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}n$ und unendlich große Normalbeschleunigungen treten in der Natur aber niemals auf. Vielmehr baut sich in der Staustromlinie die Geschwindigkeit bis zum Punkt S auf den Wert 0 ab, das Fluidteilchen geht dann „um die Ecke" und wird von neuem beschleunigt. „Um die Ecke" bedeutet hier keine Drehung, sondern: die neue Bewegung ist seitwärts.

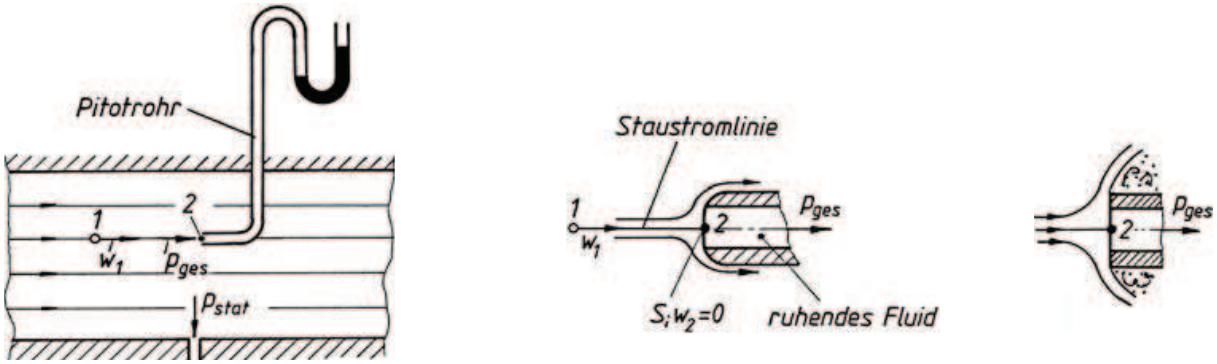


Bild 2-6 Gesamtdruckmessung mit Pitotrohr

Wir betrachten einen Punkt 2 auf einer Stromlinie, für den wir den Gesamtdruck p_{ges} berechnen wollen. Wir denken uns dort einen kleinen Staukörper mit Staupunkt im Punkt 2. Nun setzen wir die Bernoulli'sche Gleichung zwischen einem Punkt 1 etwas stromaufwärts und Punkt 2 an, Bild 2-6.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + g\,h_1 = \frac{p_2}{\rho} + 0 + g\,h_2 \quad \rightarrow \quad p_2 = p_{ges} = p_1 + \frac{1}{2}\rho\, w_1^2$$

p_1 wäre der statische Druck am Messort, wenn keine Sonde vorhanden wäre. Der Gesamtdruck ist also um den Wert $0{,}5\ \rho\ w_1^2$ größer als der statische Druck; der Wert $0{,}5\ \rho\ w_1^2$ wird als **Staudruck** oder **dynamischer Druck** p_d bezeichnet. Somit gilt:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Gesamtdruck} \;=\; \text{statischer Druck} \;+\; \text{Staudruck} \\ p_{ges} \;=\; p_{stat} \;+\; p_d\end{array}} \qquad (2.13)$$

Werte p_{ges}, p_{stat}, p_d können *jedem* Punkt eines Strömungsfeldes zugeordnet werden, unabhängig davon, ob diese Werte gemessen werden oder nicht. Der Staudruck erweist sich als einer der wichtigsten Begriffe der Strömungslehre. Als Messwert ergibt er sich als Differenz aus:

$$p_d = p_{ges} - p_{stat} = \frac{1}{2}\rho\, w^2 \quad \text{mit} \quad p_{stat} = p_1 \qquad (2.14)$$

Er dient insbesondere auch zur Geschwindigkeitsmessung: bei Kenntnis von ρ und Messung von p_d ist

$$\boxed{w = \sqrt{\frac{2\,p_d}{\rho}}} \qquad (2.15)$$

Der Staudruck p_d tritt auch als Druckabsenkung beim Einlauf in einen gerundeten Kanal auf und auch als „Anstaudruck" im Staupunkt jedes umströmten Körpers, Bild 2-7. Im Fall der Einlaufströmung sagt man auch, dass eine Druckabsenkung um *einen* Staudruck notwendig ist, um die Geschwindigkeit w „aufzubauen".

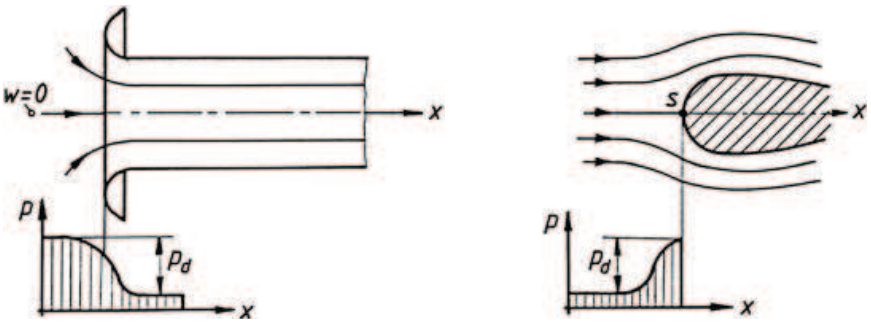


Bild 2-7
Zum Staudruck p_d

Der Staudruck wird auch vielfach zum Dimensionslosmachen anderer Drücke benutzt. Misst man w und p_d mit verschiedenen Messmethoden und prüft Gl. (2.15), so findet man eine erstaunlich gute Übereinstimmung (Abweichung meist unter 1 %!). Auch wenn als Pitotrohr nur ein vorne abgesägtes Hakenrohr verwendet wird, ergeben sich kaum größere Fehler. Die gute Übereinstimmung ist auch deshalb erstaunlich, weil wir zur Ableitung von Gl. (2.15) die Bernoulli'sche Gleichung verwendet hatten, welche Reibungsfreiheit voraussetzt. Daraus folgt umgekehrt:

Die Staupunktströmung erweist sich praktisch als reibungsfrei.

Allgemein hat man folgende Erfahrungen gemacht: außerhalb der meist enorm dünnen Wandgrenzschichten und der wirbeligen Totwassergebiete (vgl. Bild 1-4b) ist Fluidreibung praktisch unmerklich (wenn man von sehr zähen Fluiden wie Honig, kaltes Öl usw. absieht).

c) *Staudruck*

Wir haben den Staudruck bereits oben definiert. Zu seiner Messung in Rohren und Kanälen benutzt man bei Gasen oft ein Pitotrohr und eine Wandmessstelle, Bild 2-8. Da wegen der geraden Stromlinien der statische Druck im Querschnitt konstant ist, ist der an der Wand gemessene Druck gleich jenem am Ort des Pitotrohres.

In freier Strömung misst man den Staudruck meist mit dem **Prandtlrohr**, das die Messung des Gesamtdruckes und des statischen Druckes in *einer* Sonde vereinigt. Mit U-Rohr-Manometern oder anderen Differenzdruckmessgeräten kann dann direkt der Staudruck gemessen (Gl. (2.14)) und daraus die Geschwindigkeit (Gl. (2.15)) bestimmt werden.

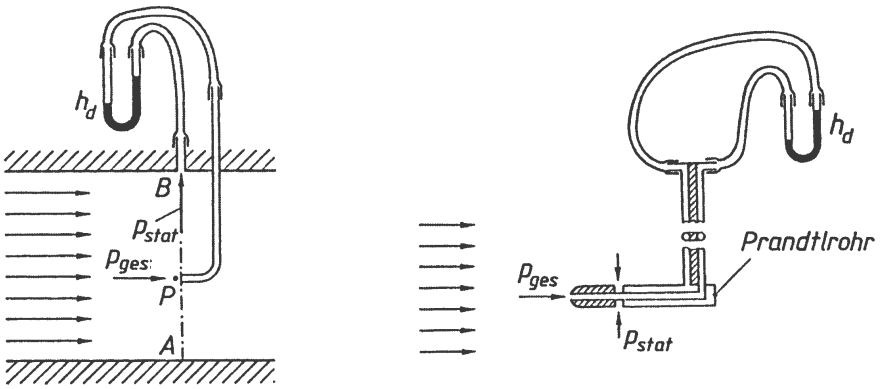
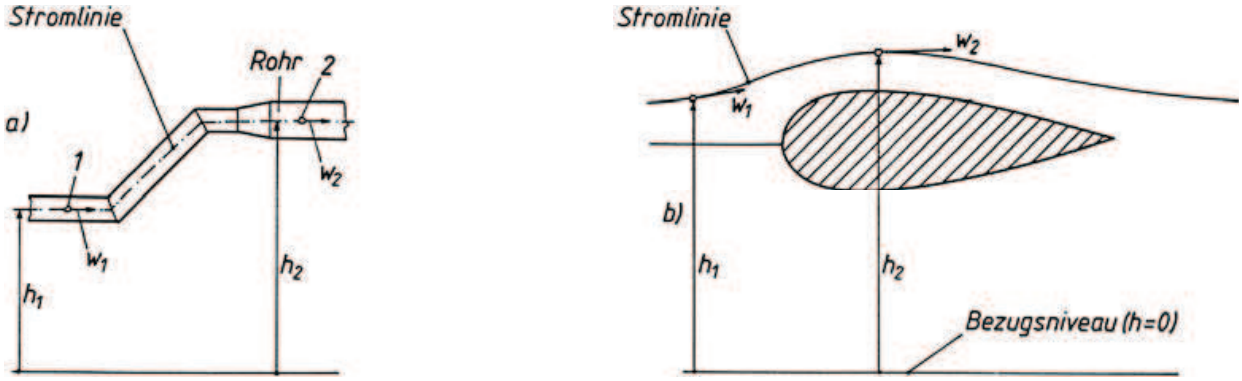


Bild 2-8
Zur Messung des Staudruckes

2.3 Regeln für die Anwendung der Bernoulli'schen Gleichung

Die Anwendung erfolgt im Allgemeinen so, dass man die Summe der drei Energieformen für zwei zur Lösung des Problems passend gewählte Punkte aufstellt und gleichsetzt. Die Stromlinie, auf der die zwei Punkte liegen müssen, kann z. B. durch ein Rohr vorgegeben sein. Die Bernoulli'sche Gleichung kann aber auch bei der freien Umströmung eines Körpers angewendet werden, Bild 2-9.



a Anwendung auf Rohr **b** Anwendung auf freie Strömung

Bild 2-9 Zur Bernoulli'schen Gleichung

Im Folgenden werden einige Regeln zusammengestellt, die teils auf Erfahrung beruhen, teils theoretisch einsichtig gemacht werden können.

1. Die Bernoulli'sche Gleichung setzt konstante Dichte ρ voraus. Dies ist für Flüssigkeiten nahezu exakt erfüllt, aber auch bei Gasen kann mit guter Näherung ρ konstant gesetzt werden, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten kleiner als etwa 30 % der jeweiligen Schallgeschwindigkeit sind (bei Umgebungsluft < 100 m/s). Die Begründung dieser Regel kann erst von der übergeordneten Warte der Gasdynamik gegeben werden.

2. Bei Gasen wird wegen der geringen Dichte und des meist viel höheren Geschwindigkeitsniveaus in der Regel die potentielle Energie gegenüber den beiden anderen Summanden in der Bernoulli'schen Gleichung vernachlässigt. Daher gilt: In Gasströmungen ist der Gesamtdruck p_{ges} in *allen* Punkten gleich groß (Gl. (2.12)).

3. Die Konstante C in der Bernoulli'schen Gleichung hat nicht nur für zwei Punkte auf ein und derselben Stromlinie den gleichen Wert, sondern ist (bei allen Strömungen, abgesehen von Sonderfällen (vgl. z. B. Beispiel 3.2c)), für *alle* Stromlinien gleich groß. Für eine große Klasse von Strömungen lässt sich der Beweis leicht geben. Für Körper, welche von einer Parallelanströmung umströmt werden, gilt: weit vor und weit hinter dem Körper ist die Geschwindigkeit und somit die kinetische Energie überall gleich. Druckenergie und potentielle Energie ergänzen sich für verschiedene Höhen auch zu einem konstanten Wert (entsprechend dem hydrostatischen Grundgesetz). Da in großer Ferne die Summe der drei Energien für *alle* Höhen gleich groß ist, muss sie es auch in körpernahen Gebieten sein.

4. Reibungswirkungen: die Bernoulli'sche Gleichung kann zwar beliebig in Beispielen angewendet werden, der Ingenieur muss sich aber immer wieder fragen, ob das Resultat auch

für ein reales Fluid eine gute Annäherung gibt. Experimentelle Erfahrung und Vergleichsrechnungen unter Berücksichtigung der Reibung können hier Hinweise geben.

Bei typischen Bedingungen gilt etwa: Reibung ist nur in wandnahen Grenzschichten und in Totwassergebieten von Bedeutung; außerhalb dieser Zonen ist Reibung unmerklich. Bild 2-10 zeigt einige Situationen: Reibungszonen sind durch Punkte gekennzeichnet. Liegen die zwei Punkte 1 und 2 für die Anwendung der Bernoulli'schen Gleichung im nichtpunktieren Bereich, so ergibt die Bernoulli'sche Gleichung sehr realitätsnahe Resultate. Liegt Punkt 2 im gepunkteten Bereich, so ist mit größeren Abweichungen zu rechnen. Auf kurze Distanzen spielt jedoch auch in punktierten Zonen Reibung kaum eine Rolle. So zeigt z. B. ein Pitotrohr auch in einem Rohr den richtigen Gesamtdruck an (Bild 2-10 oben).

Für den Ausfluss aus einer Düse gilt Folgendes: der Kernstrahl weist eine Geschwindigkeit entsprechend der Bernoulli'schen Gleichung auf; in den Randzonen nimmt die Geschwindigkeit jedoch wegen der Wandreibung ab (Bild 2-10 unten links). Allgemein gilt auch: die *relative* Bedeutung von Reibungswirkungen nimmt zu bei

- kleiner werdender Geschwindigkeit,
- kleineren Körperabmessungen,
- größerer Viskosität des Fluids.

Lässt man etwa eine Kugel in Honig absinken oder ein feines Nebeltröpfchen in Luft, so ist Reibung im ganzen Strömungsfeld bedeutsam.

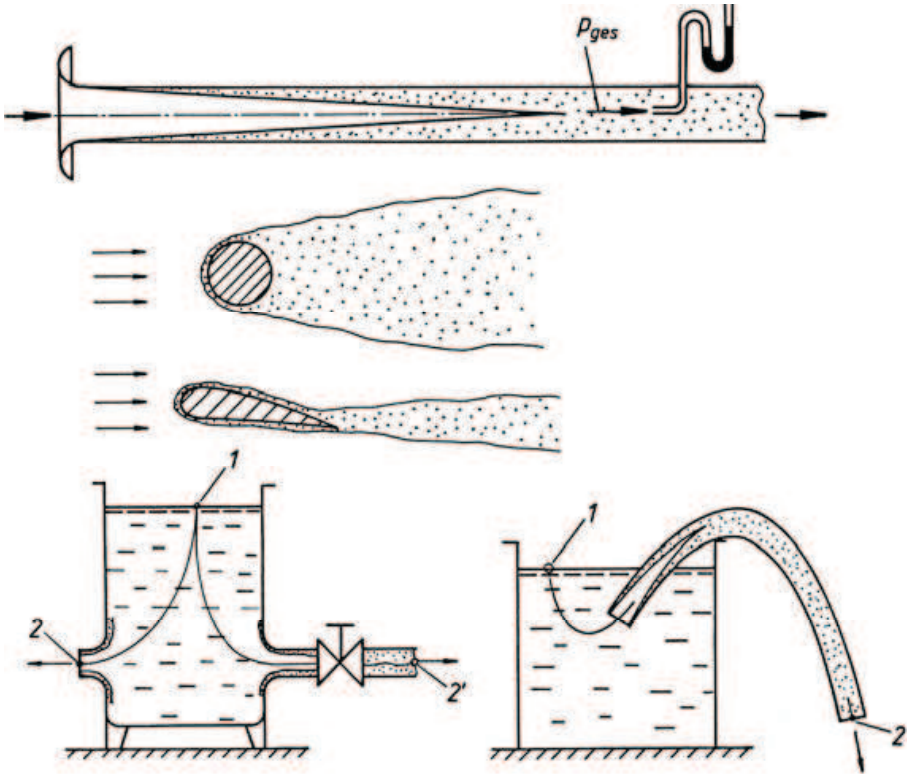


Bild 2-10 Reibungszonen bei Strömung in realen Fluiden, schematisch. Reibungszonen punktiert

2.4 Verschiedene Formen der Bernoulli'schen Gleichung

Für ein Fluidteilchen der Masse m gilt für jeden Punkt der Stromlinie

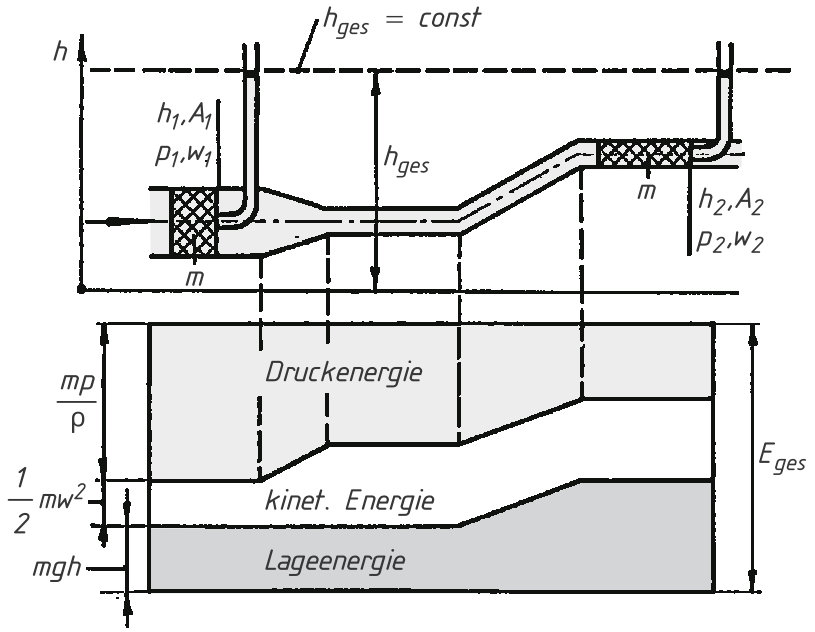
$$\frac{m\,w^2}{2} + m\,g\,h + p\cdot\frac{m}{\rho} = E_{ges} = \text{const.} \tag{2.16}$$

kinetische Energie	Lage-energie	Druck-energie	Gesamt-energie

Bezieht man die Energien auf m = 1 kg und dividiert durch die Fallbeschleunigung g so werden die Energieverhältnisse durch *Höhen* ausgedrückt.

Schließlich kann die Bernoulli'sche Gleichung auch noch in der Druckform angeschrieben werden.

Tabelle 2.1 Verschiedene Formen der Bernoulli'schen Gleichung



Dynamischer Anteil		Geodätischer Anteil		Statischer Anteil		Gesamt		SI-Einh.
Energiegleichung								
$\frac{w^2}{2}$	+	$g \cdot h$	+	$\frac{p}{\rho}$	=	e_{ges}	= const	$\frac{\text{Nm}}{\text{kg}}, \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$
Druckgleichung								
$\rho \cdot \frac{w^2}{2}$	+	$\rho \cdot g \cdot h$	+	p	=		const	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
Höhengleichung								
$\frac{w^2}{2g}$	+	h	+	$\frac{p}{\rho \cdot g}$	=	h_{ges}	= const	m

Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die verschiedenen Formen der Bernoulli'schen Gleichung und eine Skizze der Aufteilung der drei Energiearten für ein Rohr (eindimensionale Behandlung, Stromfaden). Die Energie der Lage ist durch den Verlauf der Rohrachse vorgegeben, die kinetische Energie durch die Rohrquerschnitte. Die Ergänzung auf den konstanten Wert bildet die Druckenergie. Bringt man in das Rohr an beliebiger Stelle ein Pitotrohr ein, so steigt für den Fall, dass das strömende Fluid eine Flüssigkeit ist, diese immer gleich hoch (h_{ges}!). Ist das strömende Fluid ein Gas, so zeigt ein Manometer oder U-Rohr ebenfalls an allen Stellen gleichen Gesamtdruck an.

Hier sei noch eine Bemerkung zur Wortschöpfung „Druckenergie" angebracht. Der Begriff „Energie" wird in der Mechanik im Allgemeinen für „gespeicherte Arbeit" verwendet. So wird etwa bei der Beschleunigung eines Körpers Beschleunigungsarbeit verrichtet, welche sich dann im Körper, in kinetischer Energie gespeichert, findet. Beim Heben eines Körpers wird Hubarbeit verrichtet, die sich dann gespeichert in potentieller Energie wiederfindet.

Die Druckenergie in der Bernoulli'schen Gleichung hat diesen Speichercharakter *nicht*. Wird etwa der Druckbehälter in Bild 2-2 plötzlich an der Düse und Rohrmündung abgesperrt, so findet sich im Fluid im Behälter *keine* gespeicherte „Druckenergie". Da das Fluid als inkompressibel angenommen ist, verschwindet der Druck im Behälter bei minimaler Volumsvergrößerung. Druckenergie hat daher nur Bedeutung innerhalb des Strömungsvorganges. Man sollte besser von Druckarbeit W_p sprechen. Druckarbeit hat zwar dieselbe Dimension wie potentielle und kinetische Energie, ist aber in der Qualität verschieden (kein Speichercharakter).

Druckarbeit W_p ist jene Arbeit, die erforderlich ist, um eine Masse m mit Volumen V vom Druck p_0 in stationärer Strömung in einen Raum mit Druck p zu bringen

$$W_p = (p - p_0)V \qquad w_p = W_p/m = \frac{p - p_0}{\rho}$$

Bei inkompressiblem Fluid ist eine Speicherung dieser Arbeit nicht möglich. Der Ausdruck „Druckenergie" ist aber sehr verbreitet und wird hier – trotz der obigen kritischen Anmerkungen – übernommen. Die Zuordnung eines Wertes von W_p für *jedes* Teilchen ermöglicht die Formulierung eines eingängigen Erhaltungssatzes, wie sie uns aus der Physik so vertraut sind.

2.5 Einfache Beispiele

a) Ausfluss von Flüssigkeiten aus Gefäßen und Behältern, Bild 2-11

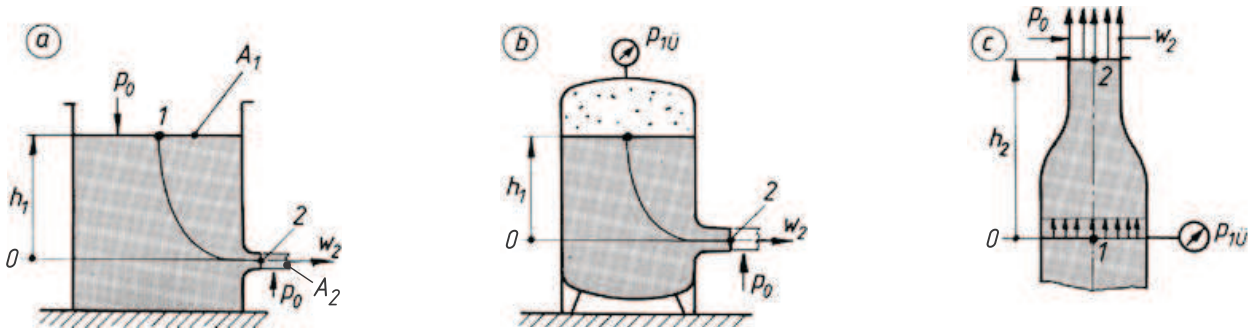


Bild 2-11 Zu den Beispielen 2.1 bis 2.3

■ Beispiel 2.1

Für ein Gefäß nach Bild 2-11a soll eine Formel für die Ausflussgeschwindigkeit w_2 aufgestellt werden.

Lösung:

Wir fassen das Gefäß samt Düse als Stromröhre auf und setzen die Bernoulli'sche Gleichung zwischen den Punkten 1 und 2 an. Hierzu müssen wir zunächst einen Bezugsdruck und ein Bezugsniveau wählen. Zweckmäßigerweise wählen wir den Atmosphärendruck p_0 als Bezugsdruck und das Bezugsniveau auf der Höhe der Düsenmitte ($h_2 = 0$). Die Energieform der Bernoulli'schen Gleichung ergibt dann

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} w_1^2 + g\, h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} w_2^2 + g\, h_2$$

Zur Vereinfachung nehmen wir hier – wie auch später häufig – an, dass $A_1 \gg A_2$. Wegen der Kontinuitätsgleichung ist dann $w_1 \ll w_2$, sodass die kinetische Energie in Punkt 1 vernachlässigt werden kann.

p_1 und p_2 sind die statischen Drücke in den Punkten 1 und 2, welche beide gleich dem Atmosphärendruck p_0 sind. Da wir die Drücke p_1, p_2 vom Atmosphärendruck weg zu zählen beginnen, ist $p_1 = p_2 = 0$. Bei p_2 ist zu beachten, dass der statische Druck normal zu den Stromlinien wirkt. – Da wir das Bezugsniveau durch Punkt 2 gelegt haben, ist $h_2 = 0$. Damit wird:

$$g\, h_1 = \frac{1}{2} w_2^2 \rightarrow \underline{w_2 = \sqrt{2 g\, h_1}} \rightarrow \text{Ausflussformel von Torricelli}$$

Es ist nicht weiter erstaunlich, dass wir hier dasselbe Resultat erhalten, das wir in Abschnitt 2.1 in Anknüpfung an die Festkörperdynamik für die Herleitung verwendet hatten (siehe Bild 2-1b). Es zeigt sich, dass das Ergebnis unabhängig von der Ausströmrichtung ist!

Die Ausflussgeschwindigkeit ist bemerkenswerterweise auch unabhängig von der Dichte des Fluids, also etwa für Wasser und Quecksilber gleich. Das Analogon in der Festkörperdynamik ist die Unabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit vom Gewicht des Körpers.

Wird die abfließende Menge oben am Behälter nicht ergänzt, so sinkt das Niveau h_1 ständig ab und w_2 wird kleiner. Der Strömungsvorgang ist dann genaugenommen instationär. Die Veränderungen erfolgen aber so langsam, dass man von quasistationärer Strömung sprechen kann (wenn $A_1 \gg A_2$). Bei einer solchen bleiben die Gesetze für stationäre Strömung näherungsweise gültig, d. h. wir können schreiben:

$$w_2(t) = \sqrt{2 g\, h_1(t)}$$

■ Beispiel 2.2

Für einen Druckbehälter nach Bild 2-11b, der eine Flüssigkeit und ein Druckgaspolster enthält, soll die Formel für die Ausflussgeschwindigkeit aufgestellt werden. Zahlenmäßige Lösung für: $p_{1ü} = 1$ bar, $h_1 = 2$ m, Wasser, $d_2 = 2$ cm; ges.: $w_2, \dot{V}$.

Lösung:

Analog wie bei Beispiel 1 ergibt die Bernoulli'sche Gleichung

$$\frac{p_{1ü}}{\rho} + 0 + g\, h_1 = 0 + \frac{w_2^2}{2} + 0$$

$$\underline{w_2 = \sqrt{2 g\, h_1 + 2 \cdot \frac{p_{1ü}}{\rho}}}$$

Zu beachten ist, dass für p_1 der Überdruck über Atmosphärendruck ($p_{1ü}$) angegeben ist. Für $p_{1ü} = 0$ ergibt sich, wie zu erwarten, die Lösung von Beispiel 2.1. Mit den Zahlenangaben wird:

$$\underline{w_2} = \sqrt{2\,g\,2 + 2\cdot 10^5 / 10^3} = \underline{15{,}5\ \text{m/s}}$$

$$\underline{\dot{V} = A_2\, w_2} = \frac{0{,}02^2\,\pi}{4} 15{,}5 = 4{,}86\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} = \underline{4{,}86\,\text{l/s}}$$

■ **Beispiel 2.3**

Für ein Spritzrohr nach Bild 2-11c soll eine Formel für die Ausflussgeschwindigkeit w_2 aufgestellt werden. Zahlenmäßige Lösung für: $p_{1ü} = 4$ bar, $h_2 = 0{,}2$ m, Benzin $\rho = 780$ kg/m^3, $d_1 = 10$ mm, $d_2 = 2$ mm. Ges.: w_2.

Lösung:

Analog wie bei Beispiel 2.1 ergibt die Bernoulli'sche Gleichung:

$$1) \qquad \frac{p_{1ü}}{\rho} + \frac{1}{2} w_1^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} w_2^2 + g\,h_2$$

Da w_1 und w_2 unbekannt sind, kann diese Gleichung noch nicht gelöst werden. Eine zweite Gleichung ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:

$$2) \qquad A_1\, w_1 = A_2\, w_2 \rightarrow w_1 = w_2 \frac{A_2}{A_1}$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man

$$\frac{p_{1ü}}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{1}{2} w_2^2 + g\,h_2$$

$$\frac{1}{2} w_2^2 (1 - A_2^2/A_1^2) = \frac{p_{1ü}}{\rho} - g\,h_2$$

$$\underline{w_2 = \sqrt{\frac{2\,p_{1ü}/\rho - 2g\,h_2}{1 - A_2^2/A_1^2}}}$$

Mit den gegebenen Zahlenwerten ergibt sich:

$$\underline{w_2} = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 10^5/780 - 2g\cdot 0{,}2}{[1-(2/10)^4]}} = \underline{32{,}0\ \text{m/s}}$$

b) Besonderheiten bei Ausfluss aus scharfkantigen Öffnungen

In Abschnitt a) erfolgte der Ausfluss immer durch gerundete Düsen, sodass angenommen werden konnte, Strahlquerschnitt A_{str} = Düsenquerschnitt A_L (Lochquerschnitt). Bei Ausfluss aus einem Behälter mit scharfkantiger Öffnung kann diese Annahme allein schon wegen der Krümmungsdruckformel nicht zutreffen, Bild 2-12a: Wenn der Strahl die Lochkante verlässt, wirkt sofort der Luftdruck p_0 auf die Oberfläche, daher muss dort wegen der Bernoulli'schen Gleichung auch bereits die Geschwindigkeit w_2 auftreten, die stromabwärts im gesamten Strahl

herrscht. Mit endlich großer Geschwindigkeit w_2 kann das Fluid wegen der Krümmungsdruckformel nicht „um die Ecke“ gehen, es muss daher die Randstromlinie *tangential an die Behälterwand* anschließen. Mit einer relativ starken Krümmung geht dann der Strahl vom Lochquerschnitt asymptotisch in den Strahlquerschnitt A_{str} über. Im Lochbereich ist im Strahlkern noch nicht die Geschwindigkeit w_2 erreicht. Das ergibt sich auch aus der Krümmungsdruckformel. Auf der erhabenen Seite der Stromlinien muss der Druck höher sein als p_0, die Geschwindigkeit daher niedriger als w_2. Dieser Umstand ermöglicht auch die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung im Lochbereich trotz größeren Strahlquerschnitts. Man definiert:

$$\frac{A_{str}}{A_L} = \alpha \quad \text{Kontraktionszahl (theoret. Bezeichnung, sonst auch: Ausflusszahl) } \alpha < 1 \tag{2.17}$$

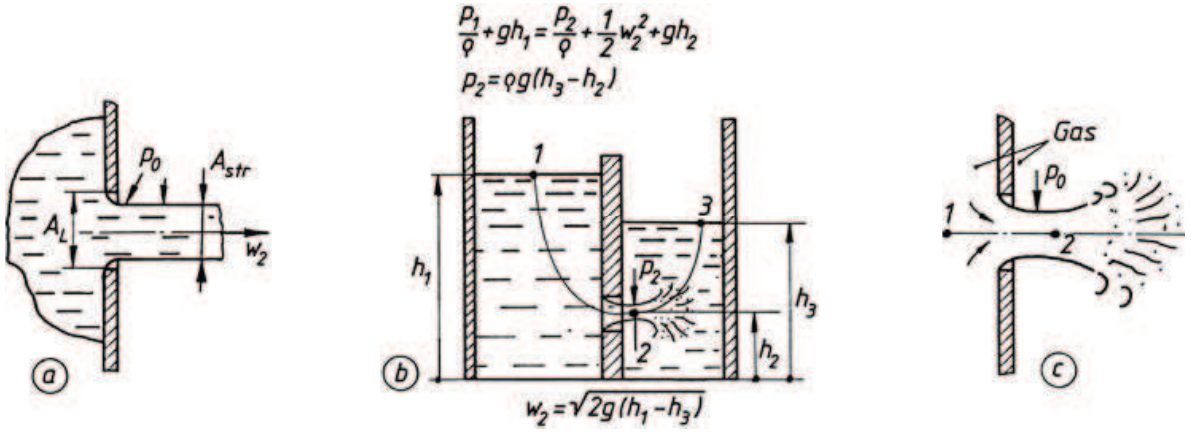


Bild 2-12 Zum Ausfluss aus Behältern

Die theoretische Strömungslehre (Potentialströmung) errechnet bei scharfkantiger Wand für lange schlitzartige Öffnungen (ebene Strömung) [49]:

$$\alpha = \frac{\pi}{2+\pi} \approx 0{,}611$$

Dieser Wert wurde bei Versuchen nahezu erreicht (z. B. 0,607), und zwar sowohl für die oben genannte als auch für die kreisförmige Lochform.

Für gut gerundete Düsen ist hingegen $\alpha \approx 1$.

Bisher hatten wir immer einen Flüssigkeitsstrahl angenommen, der in atmosphärische Luft austritt. Wie verhält es sich aber, wenn ein Wasserstrahl in ruhendes Wasser eintritt oder ein Luftstrahl in Umgebungsluft? Die Beobachtung der Strömung realer Fluide zeigt, dass sich auch hier ein scharf umrissener Strahl mit derselben Kontraktionszahl α ausbildet wie oben erörtert. Der Strahl löst sich dann aber nach wenigen Durchmessern Distanz in einer turbulenten Mischungsbewegung im ruhenden Fluid auf. Die gesamte kinetische Energie geht dabei durch Reibung in Wärme über. Die Bernoulli’sche Gleichung kann hier zwischen Punkt 1 und 2 angesetzt und zusammen mit der Kontraktionszahl α der Volumenstrom berechnet werden. Der statische Druck im Punkt 2 ergibt sich aus dem hydrostatischen Grundgesetz im rechten Behälterteil, Bild 2-12b, oder kann gleich dem atmosphärischen Druck p_0

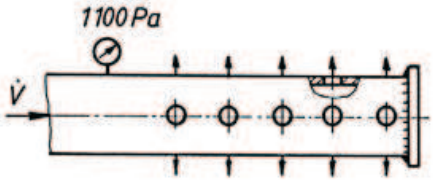
gesetzt werden, Bild 2-12c. Keinesfalls darf die Bernoulli'sche Gleichung aber zwischen Punkt 1 und 3 angesetzt werden, da dann eine Reibungszone dazwischen liegt. w_2 hängt nur von der Spiegeldifferenz $h_1 - h_3$ ab, nicht von der Tiefenlage des Loches!

■ Beispiel 2.4

Am Ende eines Belüftungsrohres soll $\dot{V} = 0{,}70$ m^3/s Luft – verteilt über eine gewisse Rohrstrecke – durch viele Löcher mit 20 mm Durchmesser (scharfkantig) in den Raum geblasen werden. Im Lochbereich herrscht ein Überdruck von 1100 Pa, $\rho = 1{,}20$ kg/m^3, $\alpha = 0{,}60$.

a) Welchen Durchmesser soll das Belüftungsrohr erhalten, wenn die mittlere Zuströmgeschwindigkeit im Rohr $w_{zul} = 10$ m/s beträgt?

b) Wie viele Löcher n sind im Rohr vorzusehen? Die kinetische Energie entsprechend der Geschwindigkeit im Rohr kann vernachlässigt werden.



Lösung:

a) Für den erforderlichen Rohrdurchmesser ergibt sich:

$$A_{erf} = \frac{\dot{V}}{w_{zul}} = \frac{0{,}70}{10} = 0{,}07 \text{ m}^2 \rightarrow \underline{D_{erf}} = \sqrt{4A_{erf}/\pi} = \underline{0{,}299 \text{ m}}$$

b) Hier haben wir es mit einem Ausfluss nach dem Schema von Bild 2-12c zu tun. Die Austrittsgeschwindigkeit aus den Löchern ergibt sich zu

$$w_2 = \sqrt{2p_{ü}/\rho} = \sqrt{2 \cdot 1100/1{,}20} = 42{,}8 \text{ m/s}$$

Querschnittsfläche eines Loches: $A_L = 0{,}02^2\,\pi/4 = 31{,}4 \cdot 10^{-5}$ m^2.

Für die Lochzahl n ergibt sich daraus mit $\alpha = 0{,}60$

$$\dot{V} = n\,\alpha\,A_L\,w_2 \rightarrow \underline{n} = \frac{\dot{V}}{\alpha\,A_L\,w_2} = \frac{0{,}70}{0{,}6 \cdot 31{,}4 \cdot 10^{-5} \cdot 42{,}8} \approx \underline{87}$$

Würde die kinetische Energie der Rohrströmung (10 m/s) voll genützt werden können, wäre die Strahlaustrittsgeschwindigkeit etwas höher:

$$\frac{p_{1ü}}{\rho} + \frac{1}{2}w_1^2 = 0 + \frac{1}{2}w_2^2 \qquad w_2 = \sqrt{2p_{1ü}/\rho + w_1^2} = 44{,}0 \text{ m/s}$$

Die Lochzahl wäre geringfügig niedriger: $n \approx 84$ Löcher.

Bezüglich des Reibungseinflusses sei Folgendes bemerkt: zwar kann die von weit herkommende Rohrströmung als Reibungszone angesehen werden, die Beschleunigung auf w_2 spielt sich jedoch in einem sehr kleinen Gebiet ab (ca. 1 cm), wobei Reibung ähnlich wie bei einer Düse an einem großen Behälter vernachlässigbar ist.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass bei einer Lochlänge l (Wandstärke), Bild 2-12b, größer als ein Durchmesser die Überlegungen von Abschnitt b) nicht mehr gültig bleiben. Der Strahl „saugt" sich dann nach der Kontraktion wieder an die Lochwand an, wobei Reibung dann eine Rolle spielt.

2.6 Bernoulli'sche Gleichung, erweitert durch Arbeits- und Verlustglied

Rohrleitungsanlagen enthalten oft energieändernde Anlagenteile (Pumpen, Turbinen, Ventilatoren), welche die Arbeitsfähigkeit des strömenden Mediums erhöhen oder Arbeit entnehmen. Diese Zu- oder Abfuhr von Arbeit wird in der erweiterten Bernoulli'schen Gleichung durch ein *Arbeitsglied* E_a berücksichtigt.

Weiterhin ist die Strömung eines realen Fluids infolge Viskosität und Haftens an der Oberfläche mit *Arbeitsverlusten* verbunden. Die Berücksichtigung dieses Verlustes an Arbeitsfähigkeit erfolgt nun in der Bernoulli'schen Gleichung durch ein *Verlustglied* E_v. Die mechanische Energie des strömenden Teilchens (kinetische + potentielle + Druckenergie) ist nicht mehr konstant. Es ist daher auch der Gesamtdruck p_{ges} und die Gesamthöhe h_{ges} (auch ohne äußere Zu- oder Abfuhr von Arbeit E_a) nicht mehr konstant; der fehlende Anteil erscheint als Reibungswärme E_v. Während Wertetripel w, h, p jedem *Querschnitt* des Rohres zugeordnet werden können, müssen die Größen E_a, E_v einer *Rohrstrecke* zwischen zwei Querschnitten zugeordnet werden. Bei der Ergänzung der Bernoulli'schen Gleichung fügt man das Arbeitsglied E_a (+ für Arbeitszufuhr) zu den Gliedern mit Index „1" und das Verlustglied E_v (nur positive Werte!) zu den Gliedern mit Index „2" hinzu. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Strömung von „1" nach „2" erfolgt. Somit lautet die erweiterte Bernoulli'sche Gleichung

$$m\frac{w_1^2}{2} + m\,g\,h_1 + m\frac{p_1}{\rho} + E_a = m\frac{w_2^2}{2} + m\,g\,h_2 + m\frac{p_2}{\rho} + E_v$$

Unter Annahme eines konstanten Durchsatzes sind die Geschwindigkeiten in den Rohrquerschnitten, d. h. auch die kinetischen Energien durch das Verhältnis der Querschnitte zueinander gegeben. Die Lageenergie der Rohrabschnitte ist durch deren geodätische Höhe festgelegt. Somit kann sich eine Änderung der Arbeitsfähigkeit nur auf die Druckenergie bzw. auf den statischen *Druck* auswirken. In der Druckgleichung heißt der Anteil des Reibungsverlustes dann *Druckverlust* Δp_v.

Die Verluste in Rohrleitungsanlagen werden üblicherweise in Vielfachen des dynamischen Anteils der Bernoulli'schen Gleichung ausgedrückt, wobei der Multiplikationsfaktor als *Widerstandszahl* ζ (Zeta; s. Kapitel 8) bezeichnet wird:

$$\boxed{e_v = \frac{E_v}{m} = \zeta\frac{w^2}{2}} \qquad \boxed{h_v = \zeta\frac{w^2}{2g}} \qquad \boxed{\Delta p_v = \zeta\,\rho\,\frac{w^2}{2}} \tag{2.18}$$

Die Verluste können noch aufgespalten werden in solche, welche aus der Wandreibung im geraden Rohr herrühren (E_{VR}) und solche welche zusätzlich durch Einbauten, Krümmer usw. verursacht werden (E_{VE}).

Bei Pumpen wird die pro kg Flüssigkeit zugeführte mechanische Arbeit als *spezifische Förder- oder Stutzenarbeit* Y bezeichnet (SI-Einheit Nm/kg oder m^2/s^2). Stattdessen wird oft auch die Förderhöhe H verwendet nach der Definition $H = Y/g$ (Einheit m).

Der Zuwachs an mechanischer Leistung im Fluid am Pumpenaustritt gegenüber dem Pumpeneintritt wird als *hydraulische Leistung* P_h bezeichnet. Hierfür ergibt sich einfach:

$$\boxed{P_h = \dot{m}\,Y = \dot{V}\,\rho\,Y = \dot{V}\,\rho\,g\,H \quad \text{Hydraulische Leistung}} \tag{2.19}$$

Der Wirkungsgrad einer Pumpe ist mit der an der Welle zugeführten Leistung P_W definiert durch

$$\eta_P = \frac{P_h}{P_W} \quad \text{Pumpenwirkungsgrad} \tag{2.20}$$

Zur Definition des Gesamtwirkungsgrades zieht man die dem Elektromotor (Wirkungsgrad η_{mot}) zugeführte elektrische Leistung P_{el} heran:

$$\eta_{ges} = \frac{P_h}{P_{el}} = \eta_P \, \eta_{mot} \quad \text{Gesamtwirkungsgrad} \tag{2.21}$$

Analoge Definitionen gelten für Turbinen. Bei den Wirkungsgraden steht dann jedoch die hydraulische Leistung im *Nenner*.

Bei Turbinen (Arbeitsentzug) ergeben sich in der Gleichung negative Werte für Y, H. In der Praxis wird $|H|$ als Fallhöhe bezeichnet.

Bei Ventilatoren, die normalerweise in einem Gebiet arbeiten, in dem das Arbeitsgas als inkompressibel angesehen werden kann, ist es üblich, die übertragene Arbeit im Druckmaß anzugeben: als Gesamtdruckerhöhung Δp_t (t steht für „total"; der Gesamtdruck wird auch als Totaldruck bezeichnet). Bei Gasen kann bekanntlich die Lageenergie vernachlässigt werden.

Enthält die Rohrleitung keine Anlagenteile für Arbeitsaustausch (Pumpen, Turbinen, Ventilatoren) so ist in den Gleichungen einfach $Y = H = \Delta p_t = 0$ zu setzen.

Tabelle 2.2 zeigt die Darstellung der Energieverteilung einschließlich Arbeits- und Verlustglied für eine Rohrleitung sowie die üblichen Formen der erweiterten Bernoulli'schen Gleichung.

Besonderheiten bei Pumpen und Ventilatoren

Abweichend von der Strömungslehre sind im Pumpenbau (und allgemein auf dem Gebiet der Strömungsmaschinen) folgende Formelzeichen üblich:

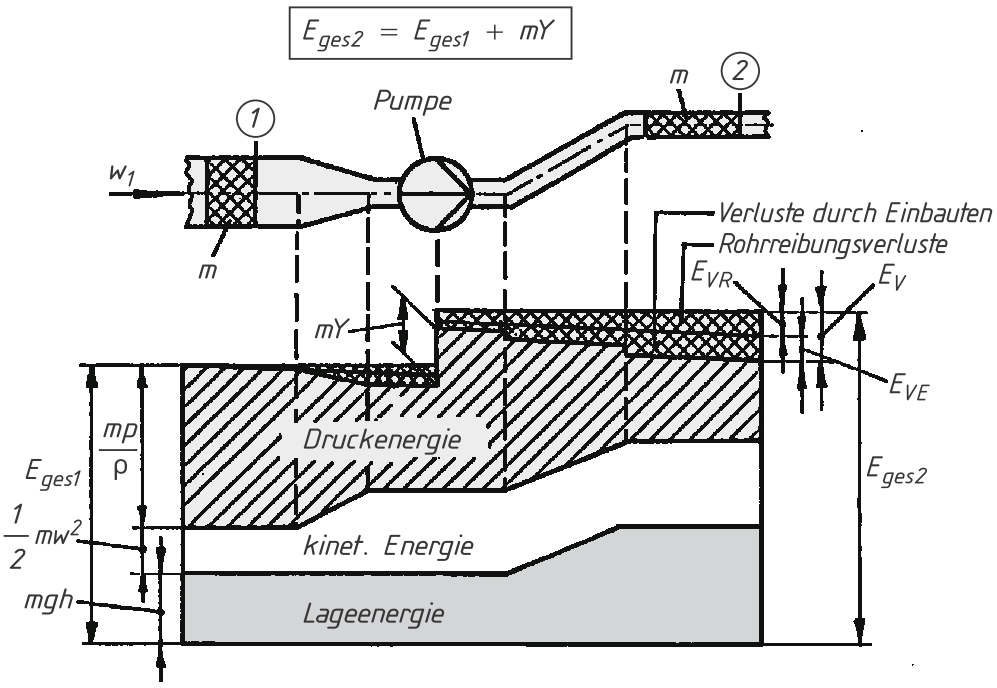
- c ... (statt w) für Geschwindigkeiten relativ zu einem ruhenden Beobachter, also auch für Geschwindigkeiten im Zulaufrohr (= Saugrohr) und Abgangsrohr (= Druckrohr)
- w ... für Geschwindigkeiten relativ zum rotierenden Schaufel- oder Laufrad, also z. B. die Fluidgeschwindigkeit in einem Laufradkanal relativ zu diesem
- u ... Umfangsgeschwindigkeit von Punkten des Laufrades in Bezug auf einen ruhenden Beobachter

Es gilt die Vektorgleichung

$$\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$$

Die spezifische Förderarbeit Y einer Pumpe kann durch Messung der Drücke unmittelbar vor und nach der Pumpe (p_s, p_d) sowie durch eine $\dot{V}$-Messung ermittelt werden, Bild 2-13. Mit den im **Pumpenbau** üblichen Bezeichnungen ergibt sich aus der Energiegleichung, Tabelle 2.2.

Tabelle 2.2 Bernoulli'sche Gleichung, ergänzt durch Arbeits- und Verlustglied



Energiegleichung $\frac{w_1^2}{2} + g\,h_1 + \frac{p_1}{\rho} + Y = \frac{w_2^2}{2} + g\,h_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\Delta p_v}{\rho}$	SI-Einheit Nm/kg; m^2/s^2
Höhengleichung $\frac{w_1^2}{2g} + h_1 + \frac{p_1}{\rho\,g} + H = \frac{w_2^2}{2g} + h_2 + \frac{p_2}{\rho\,g} + h_v$	m
Druckgleichung (Gase, Ventilatoren: $\rho\,g\,h \approx 0$) $\frac{1}{2}\rho\,w_1^2 + \rho\,g\,h_1 + p_1 + \Delta p_t = \frac{1}{2}\rho\,w_2^2 + \rho\,g\,h_2 + p_2 + \Delta p_v$	Pa

$$Y = \frac{p_d - p_s}{\rho} + \frac{c_d^2 - c_s^2}{2} + y\,g \qquad (2.22)$$

$c_d = \dot{V}/A_d \quad c_s = \dot{V}/A_s$
Geschw. in Druck- und Saugstutzen

y berücksichtigt die unterschiedliche Höhenposition der Manometer. Energieverluste erscheinen in Gl. (2.22) nicht. *Y* gibt ja nicht die pro kg zugeführte *mechanische* Energie an, sondern nur jenen (großen) Anteil, der sich tatsächlich in der Flüssigkeit wiederfindet. Normalerweise findet sich fast die gesamte zugeführte Energie in *Druckform* in der Flüssigkeit wieder. Die Zufuhr kinetischer Energie wird zu null, wenn Saug- und Druckrohr die gleiche Querschnitts-

fläche haben. Die Verluste in der Pumpe sind im Wirkungsgrad erfasst ($P_W - P_h$ = Verlust). Analog ergibt sich für Ventilatoren; Bild 2-13 rechts:

$$\Delta p_t = (p_d - p_s) + \frac{1}{2}\rho(c_d^2 - c_s^2) = \Delta p_{stat} + \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\dot V}{A_d}\right)^2 - \left(\frac{\dot V}{A_s}\right)^2\right] \tag{2.23}$$

$$P_h = \dot V \cdot \Delta p_t \qquad \text{Theoretische Leistung des Ventilators} \tag{2.24}$$

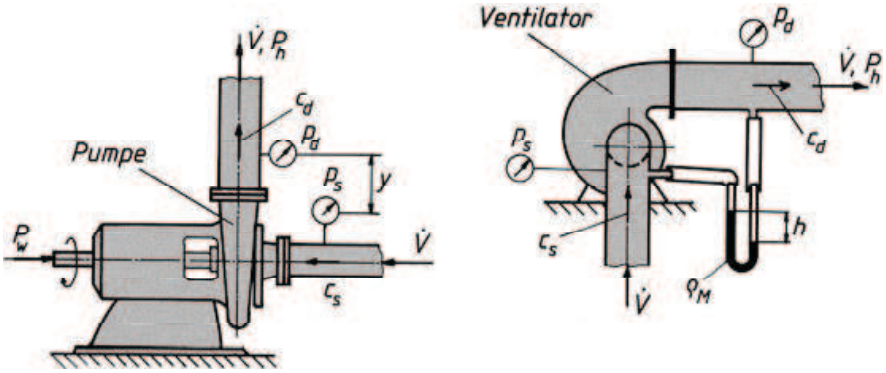


Bild 2-13 Bezeichnungen bei Pumpen und Ventilatoren. In der Praxis wird bei Pumpen statt des Symbols $\dot V$ oft auch Q verwendet.

Austrittsverlust

Häufig kommt der Fall vor, dass ein Fluid aus einem Rohr in einen großen Behälter eintritt, in dem die große Masse des Fluids praktisch ruht, Bild 2-14. Hier wird die kinetische Energie durch Verwirbelung in Wärme übergeführt. Es gibt zwei Möglichkeiten, diesen Umstand in der Bernoulli'schen Gleichung zu berücksichtigen:

a) Ansetzen der Bernoulli'schen Gleichung zwischen Punkt 1 und 2, wobei für p_2 der statische Druck im Behälter entsprechend dem Mündungsniveau einzusetzen ist; $w_2 = w_{aus}$; $h_2 = h_3$; $p_2 = p_3$.

$$\frac{p_1}{\rho} + g\,h_1 = \frac{p_2}{\rho} + g\,h_2 + \frac{\Delta p_{v,1-2}}{\rho} + \frac{1}{2}w_{aus}^2.$$

b) Ansetzen der Bernoulli'schen Gleichung zwischen Punkt 1 und 3, wobei $w_3 = 0$, $p_3 = p_2$. Auf der rechten Seite muss der sog. Austrittsverlust $e_{v,aus} = 1/2\, w_{aus}^2$ zu den übrigen Verlustgliedern hinzugefügt werden ($\zeta = 1$).

$$\frac{p_1}{\rho} + g\,h_1 = \frac{p_3}{\rho} + g\,h_3 + \frac{\Delta p_{v,1-2}}{\rho} + e_{v,aus}.$$

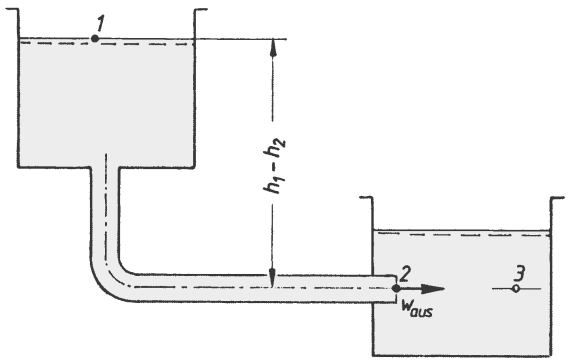


Bild 2-14 Zum Austrittsverlust

2.7 Beispiel 2.5

Wasserkraftanlage, die sowohl im *Turbinenbetrieb* zur Stromerzeugung als auch im *Pumpbetrieb* zum Hochpumpen von Wasser für spätere Spitzenstromerzeugung geschaltet werden kann. Von zwei Messstellen der Druckrohrleitung (Bild 2-15) werden in der Fernmessstation die (Über-)Drücke angezeigt. Diese sind zusammen mit geometrischen Daten in der Tabelle angegeben:

Druck	Rohr-durchmesser	Höhe über Meeresspiegel
$p_1 =$ 9 bar	$d_1 = 4{,}4$ m	$h_1 = 2200$ m
$p_2 = 48$ bar	$d_2 = 3{,}5$ m	$h_2 = 1830$ m

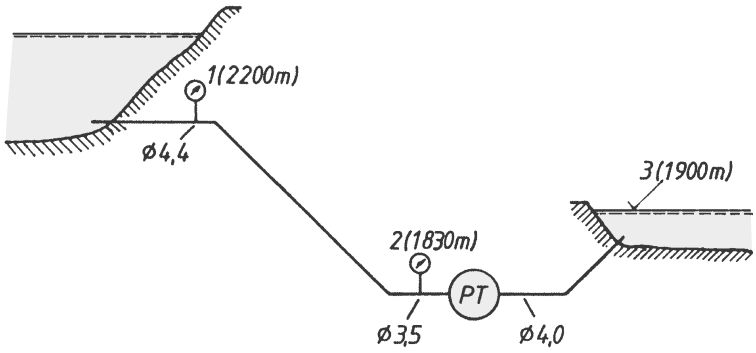


Bild 2-15
Beispiel Wasserkraftanlage

Der Wasserdurchflussmesser zeigt $\dot{V} = 60$ m^3/s. Folgende Fragen sind zu beantworten:

a) Arbeitet die Anlage im Turbinen- oder im Pumpbetrieb?

b) Wie groß sind die Verluste an mechanischer Energie zwischen den beiden Messstellen, ausgedrückt in: spezifischer Energie Δe_v, in Druckverlust Δp_v, in Druckhöhenverlust Δh_v?

c) Wie groß ist die Turbinen- oder Pumpleistung an der Welle, wenn der Maschinenwirkungsgrad 90 % beträgt? Zwischen den Punkten 3 und 2 treten Reibungsverluste mit einem ζ-Wert von 3,0 auf, bezogen auf einen Rohrdurchmesser von $d = 4$ m.

Lösung:

a) Wir setzen die um das Verlustglied Δp_v erweiterte Bernoulli'sche Gleichung (Druckform) für die Messstellen 1 und 2 an, wobei wir zunächst annehmen, dass die Strömung von 1 nach 2 erfolge (Turbinenbetrieb) und demgemäß Δp_v zu den Gliedern mit Index „2" hinzuzufügen ist.

$$\rho\frac{w_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \rho\frac{w_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 + \Delta p_{v,1-2}$$

Die Geschwindigkeiten w_1, w_2 ergeben sich mit $\dot{V}$ aus der Kontinuitätsgleichung

$$w_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = 3{,}95 \text{ m/s}, \qquad w_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = 6{,}24 \text{ m/s}$$

Als Druckbezugsniveau für die Bernoulli'sche Gleichung verwenden wir den Atmosphärendruck, den wir hier als unabhängig von der Höhe voraussetzen. Die Druckmesswerte der zwei Messstellen sind bereits Überdrücke über dem Atmosphärendruck. Als Höhenbezugsniveau verwenden wir den Meeresspiegel, sodass wir in die Bernoulli'sche Gleichung direkt die angegebenen Werte einsetzen können. An sich ist aber das Ergebnis unabhängig von der Wahl des Bezugsniveaus. Aus der Bernoulli'schen Gleichung lässt sich nun Δp_v berechnen:

$$1000 \cdot \frac{3{,}95^2}{2} + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2200 + 9 \cdot 10^5 = 1000 \cdot \frac{6{,}24^2}{2} +$$

$$+ 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1830 + 48 \cdot 10^5 + \Delta p_{v,1-2}$$

$$\Delta p_{v,1-2} = -2{,}82 \text{ bar}$$

Da Δp_v den Verlust an mechanischer Energie aus der Strömung darstellt und dieser nur positiv sein kann, bedeutet das Minusvorzeichen, dass wir Δp_v zu den Gliedern mit dem Index „1" hinzufügen müssen und nicht zu jenen mit dem Index „2" wie ursprünglich angenommen. Die Strömung verläuft daher von 2 nach 1. *Es herrscht also Pumpbetrieb*.

b) Aus der Energiegleichung, oder einfacher aus $\Delta p_{v,\,1-2}$ erhalten wir:

$$\underline{\Delta e_{v,2-1} = -\frac{\Delta p_{v,2-1}}{\rho} = 282 \text{ Nm/kg}}$$

Ferner ist

$$\underline{\Delta p_{v,2-1} = 2{,}82 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}$$

$$\underline{\Delta h_v = \frac{\Delta p_v}{\rho g} = 28{,}7 \text{ m}}$$

c) Um die der Pumpe zuzuführende Wellenleistung zu ermitteln, setzen wir die Bernoulli'sche Gleichung zwischen den Punkten 3 und 1 an (Bild 2-14). Jetzt müssen wir außer den Reibungsgliedern auch ein Arbeitsglied berücksichtigen

$$\frac{w_1^2}{2} + g\,h_1 + \frac{p_1}{\rho} + \Delta e_{v,3-2} + \Delta e_{v,2-1} = \frac{w_3^2}{2} + g\,h_3 + \frac{p_3}{\rho} + Y$$

Im Punkt 3 herrscht Atmosphärendruck. Daher müssen wir in die Bernoulli'sche Gleichung für $p_3 = 0$ setzen. Wegen der großen Querschnittsfläche ist dort auch $w_3 = 0$ zu setzen.

$$\frac{3{,}95^2}{2} + 9{,}81 \cdot 2200 + \frac{9 \cdot 10^5}{1000} + 3 \cdot 0{,}5 \cdot 4{,}77^2 + 282 = 0 + 9{,}81 \cdot 1900 + 0 + Y$$

Die spezifische Förderarbeit, welche von der Pumpe dem Wasser letztlich übertragen wurde, errechnet sich daraus zu

$Y = 4167$ Nm/kg

Die dem Wasser zugeführte mechanische Leistung wird

$$P_h = \dot{m}\, Y = \dot{V}\, \rho\, Y = 60 \cdot 10^3 \cdot 4167 = 250 \cdot 10^6 \text{ Nm/s} = 250 \text{ MW}$$

Die Umsetzung von mechanischer Energie von der Pumpenwelle bis zum Wasser erfolgt nur unvollkommen und mit dem Wirkungsgrad von 90 %. Die der Pumpe zuzuführende Wellenleistung ist daher

$$\underline{P_w = \frac{P_h}{0{,}9} = \frac{250}{0{,}9} = 278 \text{ MW}}$$

Die Verluste in der Pumpe ergeben sich zu 278 – 250 = 28 MW.

2.8 Übungsaufgaben

2.1 Die Gültigkeit der Bernoulli'schen Gleichung setzt voraus (Bezeichnen Sie die richtigen Antworten.)

a) Ideales Fluid
b) laminare Strömung
c) stationäre Strömung
d) Reibungsfreiheit
e) gilt nur für Rohrströmungen
f) gilt nur für Flüssigkeiten
g) Energieerhaltungssatz der Mechanik

2.2 Die Gültigkeit der Bernoulli'schen Gleichung schließt folgende weitere Zusammenhänge ein. (Bezeichnen Sie die richtige Antwort.)

a) bei zunehmender Geschwindigkeit nimmt auch der Druck zu
b) längs einer Stromlinie ist die Geschwindigkeit konstant
c) längs einer Stromlinie ist die Gesamtenergie konstant, diese kann aber von Stromlinie zu Stromlinie variieren
d) die Gesamtenergie ist im gesamten Strömungsfeld konstant

2.3 Welche Sätze treffen für den *statischen Druck* eines Fluids zu? (Bezeichnen Sie die richtigen Antworten.)

a) Kann von einem ruhenden Beobachter, an dem das Fluid vorbeifließt, nicht gemessen werden
b) Ist jener Druck, der auftritt, wenn das Fluid zur Ruhe gebracht wird
c) Kann von einem ruhenden Beobachter mit einer Sonde, welche die Öffnung normal zur Strömung hat, gemessen werden
d) Kann von einem mitschwimmenden Beobachter in beliebigen Richtungen gemessen werden
e) Wird mit einem *Pitotrohr* gemessen
f) Ist jener Druck, der in der Bernoulli'schen Gleichung einzusetzen ist

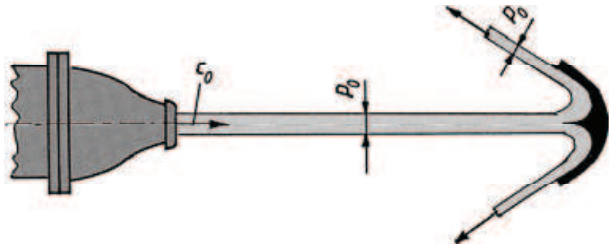
2.4 Die Gültigkeit für die durch Arbeits- und Verlustglied ergänzte Bernoulli'sche Gleichung schließt folgende Zusammenhänge ein (Bezeichnen Sie die richtigen Antworten.)

a) Durch Reibung wird die Strömungsgeschwindigkeit zunehmend langsamer.
b) Durch Reibungswirkung sinkt längs der Strömung der Druck.
c) Arbeitszufuhr kann nur durch Erhöhung der kinetischen Energie erfolgen.
d) Die Förderhöhe H einer Pumpe ist ein Maß dafür, wie hoch die Pumpe eine Flüssigkeit pumpen kann.
e) H ist ein Maß für die der Flüssigkeit zugeführte mechanische Arbeit.

2.5 Bezeichnen Sie die richtige Antwort zum Begriff „Druckenergie"

a) Ist in Fluiden auf Grund ihres Druckes gespeicherte Arbeit
b) Kann gespeichert und zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt abgerufen werden (analog wie Hubarbeit in potentieller Energie gespeichert wird)
c) Kann nur aus dem Absolutdruck berechnet werden
d) Ist jene Arbeit, die erforderlich ist, um eine Masse in stationärer Strömung in ein Gebiet höheren Druckes zu bringen

2.6 Ein Flüssigkeits-Freistrahl tritt mit der Geschwindigkeit c_0 aus einer Düse in atmosphärische Luft (konstanten Druckes) aus und wird von einer festen Schaufel umgelenkt. Der Einfluss von Höhendifferenzen sei vernachlässigbar, desgleichen Reibung mit Luft und Schaufelfläche.



a) Welche Aussage über die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an allen luftberührten Stellen kann auf Grund der Bernoulli'schen Gleichung gemacht werden?
b) Welche Aussage kann über Druck und Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der gekrümmten Schaufelwand gemacht werden?
c) Welche Aussage kann über die Geschwindigkeitsverteilung im abgehenden Strahl getroffen werden?

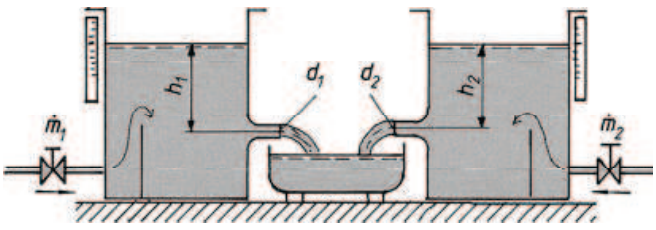
2.7 Die Schaufel nach Aufgabe 2.6 bewege sich in Richtung des Strahles mit einer Geschwindigkeit $u < c_0$.

Wie muss das Beobachtungssystem gewählt werden, damit die Schaufelströmung stationär wird und die Aussagen von Aufgabe 2.6 gültig bleiben?

****2.8*** In einem Windkanalversuch werden bei der ebenen Umströmung eines Körpers Stromlinien durch Rauchfäden markiert. In der Parallelströmung weit vor dem Körper (w_∞ = 30 m/s) haben die Stromlinien eine Distanz von 2 cm. Der Druck sei dort p_∞.

a) Welche mittlere Geschwindigkeit herrscht an einem Ort in der Nähe des Körpers, wo man eine Distanz der Stromlinien von 1,3 cm beobachtet?
b) Welcher mittlere Druck herrscht an dieser Stelle (die weder dem Grenzschichtbereich noch dem Totwassergebiet angehören möge)? Luftdichte $\rho = 1{,}15\ \mathrm{kg/m^3}$.

2.9 Mischanlage. Zwei Flüssigkeiten (ρ_1 = 1000 kg/m^3, ρ_2 = 780 kg/m^3) sollen durch freien Ausfluss aus zwei Zwischenbehältern gemischt werden, so dass



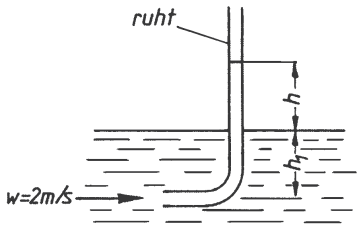
$\dot{m}_1$ = 20.000 kg/h und

$\dot{m}_2$ = 12.000 kg/h. Die Düsendurchmesser sind so auszulegen (d_1, d_2), dass bei richtigem Mischungsverhältnis die Flüssigkeiten in beiden Zwischenbehältern je 1 m über Düsenniveau stehen.

2.10 Welche Werte h_1, h_2 sind bei der Mischanlage nach Aufgabe 2.9 einzustellen, wenn abweichend vom Nenndurchsatz gefordert wird:
$\dot{m}_1$ = 24.000 kg/h und $\dot{m}_2$ = 14.000 kg/h?

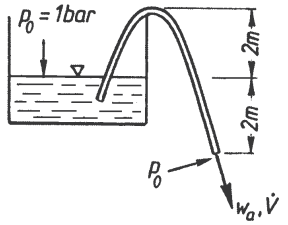
***2.11** a) Um welche Höhe $h = f(h_1, \rho, g, w)$ steigt eine Flüssigkeit in einem Pitotrohr über den Spiegel der Flüssigkeit? (Formel)

b) Welcher Wert ergibt sich für Wasser, das mit 2 m/s strömt?



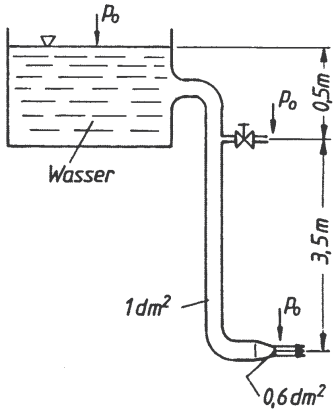
***2.12** Wasserbehälter: Mit Hilfe eines Schlauches (lichte Weite 25 mm) wird Wasser abgezogen. An der obersten Stelle ist der Schlauch etwas gequetscht und hat dort nur 60 % seines Normalquerschnittes. Das Niveau im Behälter ist gleichbleibend. Reibungsfreiheit soll angenommen werden. Man berechne:

a) Austrittsgeschwindigkeit w_a
b) Volumenstrom $\dot{V}$ in *l*/*s* und in m^3/h
c) Absolutdruck an der gequetschten Stelle
d) Ist die Annahme von Reibungsfreiheit realistisch?



***2.13** Gefäß mit Abflussrohr entsprechend Skizze.

a) Tritt bei Öffnung des kleinen Ventils Wasser aus oder Luft ein? (reibungsfrei)
b) Hängt die Antwort auf a) von der Fluiddichte ρ ab?
c) Beantworten Sie Frage a) für den Fall, dass sich das kleine Ventil 0,5 m über der Rohrmündung befindet
d) Zeichnen Sie schematisch die Aufteilung in die drei Energiearten auf analog wie in Bild 2-1b.



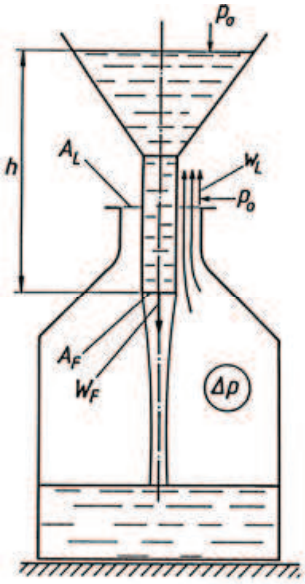
Anmerkung: Die Druckverteilung richtet sich im Wesentlichen nach der Strömung im größeren Rohr. Herrscht in diesem auf der Höhe des kleinen Ventils Unterdruck gegenüber Atmosphäre, so wird Luft eingesogen. Andernfalls tritt Wasser aus.

***2.14** Eine Flasche wird mit Hilfe eines Trichters mit Flüssigkeit gefüllt. Das einströmende Flüssigkeitsvolumen $\dot{V}$ verdrängt ein gleich großes Luftvolumen aus der Flasche, welches durch die kreisringförmige Fläche A_L zwischen Trichter und Flaschenhals mit der Geschwindigkeit w_L ausströmt. Zum Aufbau der Geschwindigkeit w_L ist ein gewisser Überdruck Δp in der Flasche erforderlich, welcher seinerseits die Wasserströmung (w_F) behindert. Man ermittle

a) allgemeine Formeln für
$\Delta p = f(h, \rho_L, \rho_F, a = A_L/A_F)$ und
$\dot{V} = f_1(h, \rho_F, \rho_L, a)$

b) Ab welchem Flächenverhältnis $\bar{a}$ wird der Flüssigkeitsdurchfluss um mehr als 10 % reduziert (verglichen mit Verhältnissen, wo $A_L \gg A_F$, d. h. $a \gg 1$)?

c) konkrete Werte von Δp, $\dot{V}$ für $h = 0{,}15$ m;
$A_F = 2$ cm²; $A_L = 0{,}1$ cm²; $\rho_F = 1000$ kg/m³;
$\rho_L = 1{,}225$ kg/m³.

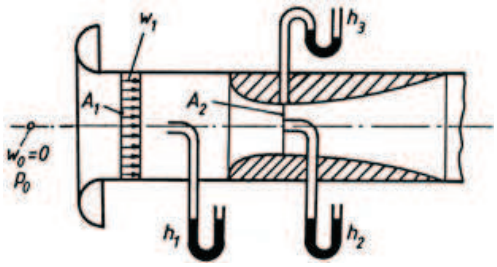


2.15 Saugrohr eines Klein-Windkanals. In den U-Rohr-Manometern befindet sich Wasser. Dichte der Luft $\rho = 1{,}1$ kg/m^3. $A_1 = 3$ dm^2, $A_2 = 2$ dm^2, $h_3 = -200$ mm WS. Man berechne (reibungsfrei):

a) w_1, w_2, $\dot{V}$

b) h_1, h_2 (+ ≙ Überdruck)

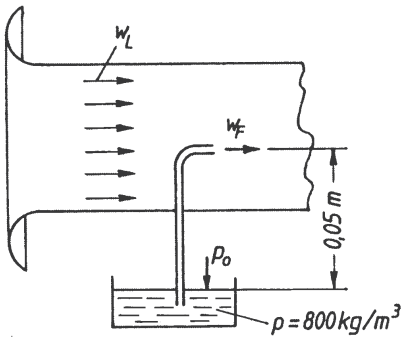
c) Ist die Annahme von Reibungsfreiheit realistisch?



****2.16*** Ansaugen einer Flüssigkeit durch einen Luftstrom.

a) Welche Luftgeschwindigkeit ist erforderlich, damit die Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit
$w_F = 1$ m/s austritt?
$\rho_L = 1{,}22$ kg/m^3 (reibungsfrei)

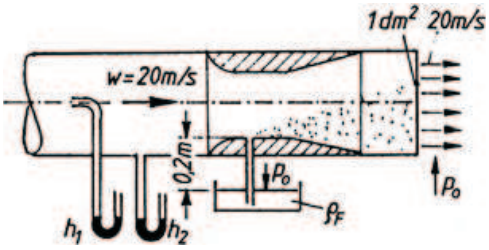
b) Ist die Annahme von Reibungsfreiheit realistisch?



****2.17*** Ein Rohr mit einer trichterförmigen Verengung wird von Luft ($\rho = 1{,}15$ kg/m^3) durchströmt. An der engsten Stelle wird durch ein Röhrchen eine Flüssigkeit der Dichte $\rho_F = 800$ kg/m^3 hochgesaugt. Reibungsfreiheit der Luftströmung soll vorausgesetzt werden.
Man berechne:

a) verengter Querschnitt damit die Flüssigkeit gerade austritt.

b) Auf welche Höhen (h_1, h_2) stellt sich Wasser in den gezeichneten U-Rohren ein? (+ ≙ Überdruck)

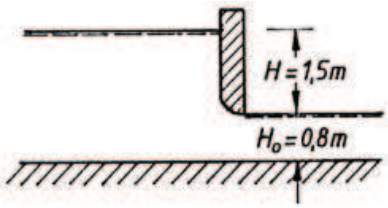


2.18 Aus einem Wehr strömt Wasser durch einen Bodenspalt der Breite $b = 2$ m aus.

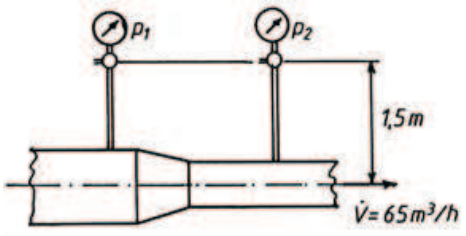
a) Zeigen Sie allgemein, dass die Austrittsgeschwindigkeit $w_2 = \sqrt{2gH}$ über die ganze Höhe H_0 gleich groß ist (reibungsfrei)

b) Berechnen Sie den austretenden Volumenstrom $\dot{V}$

c) Ist die Annahme von Reibungsfreiheit realistisch?

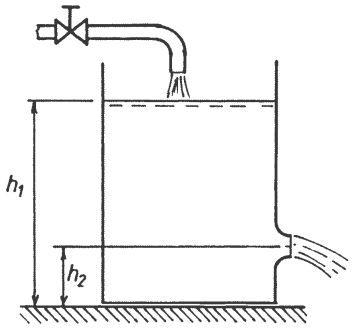


2.19 Druckmessung in einer Wasserleitung. Ein Manometer „1“ zeigt p_1 = 1,52 bar. Das Rohr ist knapp nach Messstelle „1“ von d_1 = 125 auf d_2 = 80 mm eingezogen. Die Messleitungen zu den Manometern sind bis zu den angegebenen Höhen mit Wasser gefüllt. Dies wird durch einen Dreiweghahn sichergestellt. Durch kurzzeitiges Schwenken um 90° kann evtl. in der Messleitung vorhandene Luft entweichen.

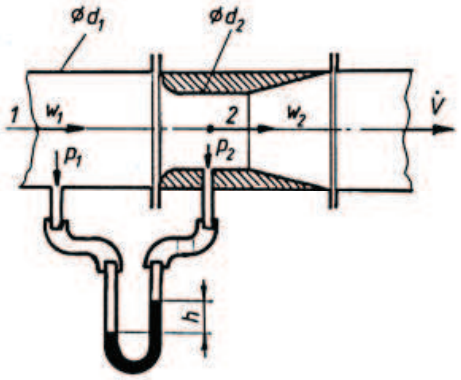


a) Welche Anzeige ist bei Manometer „2“ zu erwarten, wenn reibungsfreie Strömung zwischen „1“ und „2“ angenommen wird?
b) Welche Drücke p_{1m} und p_{2m} herrschen in Rohrmitte?

2.20 Welche stationäre Höhe h_1 stellt sich in einem Zwischenbehälter ein, in den $\dot{V}$ = 60 m³/ h Wasser gepumpt werden, welche unten durch eine Düse mit dem Durchmesser d_1 = 60 mm abfließen können, h_2 = 0,3 m?

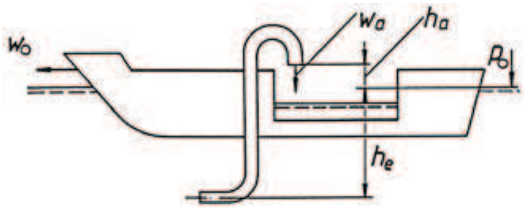


****2.21*** Venturirohre (Skizze) werden zur Messung des Volumenstromes $\dot{V}$ in Rohrleitungen verwendet. Durch die Verengung entsteht höhere Geschwindigkeit und niedrigerer Druck. Durch Messung der Druckdifferenz $p_1 - p_2$ kann w_2 bzw. $\dot{V}$ bestimmt werden.



a) Man ermittle die allgemeine Formel $w_2 = f(\rho, A_1, A_2, p_1 - p_2)$; reibungsfrei
b) Man ermittle $\dot{V}$ für D_1 = 150 mm, D_2 = 100 mm, Luft ρ = 1,20 kg/m³, $p_1 - p_2 \mathrel{\hat{=}}$ 250 mm WS (U-Rohrmanometer)
c) Man ermittle $\dot{V}$ für D_1 = 70 mm, D_2 = 45 mm, Wasser, $p_1 - p_2 \mathrel{\hat{=}}$ 310 mm (U-Rohr mit Quecksilberfüllung)
d) Ist die Annahme von Reibungsfreiheit realistisch?

****2.22*** Ein Fahrzeug (z. B. Schiff, Dampflokomotive oder Löschflugzeug) senkt ein Hakenrohr gegen die Fahrtrichtung ins Wasser um einen Vorratstank aufzufüllen.



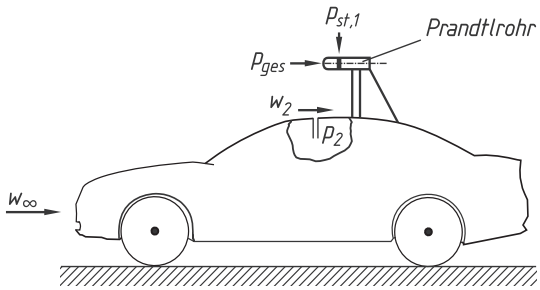
a) Man entwickle eine Gleichung für die Geschwindigkeit w_a, mit der Wasser aus dem Rohr austritt (ohne Berücksichtigung der Reibung; diese werden wir in Aufgabe 8.18 berücksichtigen!).

b) Welche Beziehung gilt für den Druck in der Einströmöffnung des Rohres?

c) Welcher Volumenstrom $\dot{V}$ ergibt sich bei einem Boot, das ein Hakenrohr mit $d = 50$ mm absenkt und mit $w_0 = 6$ m/s fährt? $h_a = 1{,}2$ m.
Man beachte, dass für ein fahrzeugfestes Koordinatensystem die Strömung stationär wird und das Wasser mit w_0 dem Rohr entgegenströmt!

d) Ist die Annahme von Reibungsfreiheit hier realistisch?

2.23 Pkw, Druck- und Geschwindigkeitsmessung. Ein Prandtlrohr ist so hoch über dem Dach montiert, dass dort ungestörte Strömung herrscht (w_∞ = Fahrgeschwindigkeit). Auf dem Dach befindet sich eine Anbohrung zur Messung des lokalen statischen Druckes p_2. $\rho = 1{,}15$ kg/m³.



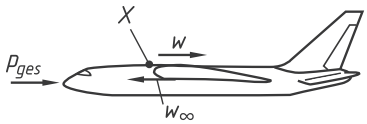
a) Mit einem Differenzdruckmanometer wird zunächst $p_d = p_{ges} - p_{st,1} \mathrel{\hat{=}} 84$ mm WS gemessen (Prandtlrohr). Welche Fahrgeschwindigkeit w_∞ ergibt sich daraus? Windstille sei vorausgesetzt.

b) In einer weiteren Messung wird der Gesamtdruckanschluss des Prandtlrohres und p_2 auf das Differenzdruckmanometer geschaltet:
$p_{d,2} = p_{ges} - p_2 \mathrel{\hat{=}} 121$ mm WS. Welche lokale Luftgeschwindigkeit w_2 ergibt sich daraus für die Messstelle 2 am Dach (außerhalb der Grenzschicht), wenn angenommen werden kann, dass die Strömung bis dorthin verlustlos erfolgte?

c) Warum ist der Gesamtdruck in Punkt 2 gleich wie beim Prandtlrohr?

d) Welche Geschwindigkeiten w_1, w_2 ergeben sich, wenn bekannt ist, dass Gegenwind von 5 km/h herrscht?

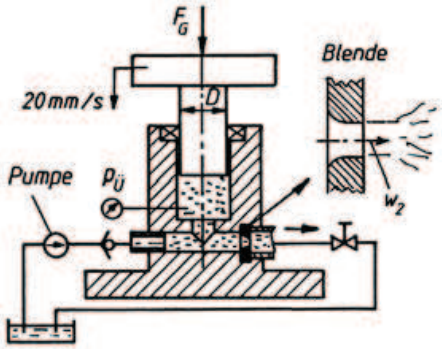
2.24 a) Wie groß ist der Gesamtdruck an der Nase eines schlanken Flugkörpers, der mit 400 km/h in Luft 1 km über Meeresniveau fliegt?



b) Wie groß ist der Gesamtdruck bei Punkt X? (vgl. Aufgabe 2.23, c)

c) Mit welcher Geschwindigkeit relativ zum Körper strömt die Luft bei Punkt X, wenn dort gegenüber der Nase ein Unterdruck 0,080 bar herrscht? Inkompressibilität soll trotz der hohen Geschwindigkeit noch vorausgesetzt werden.

****2.25*** In einer hydraulischen Hebevorrichtung wird mit Hilfe einer Handpumpe über ein Rückschlagventil Öl unter den Hubkolben ($D = 6$ cm) gepumpt und eine Last von $F_G = 3000$ N gehoben. Zum Senken wird ein Ölablassventil geöffnet. Die Senkgeschwindigkeit soll 20 mm/s betragen. Dies wird durch eine gerundete Lochblende ($\alpha \approx 1$) im Ölablassweg erreicht. Die Strömungswiderstände in der restlichen Rohrleitung sind vernachlässigbar, ebenso die Lageenergie. Öldichte $\rho = 850$ kg/m³.



Man berechne:

a) Öldruck $p_ü$

b) Erforderlicher Lochblendendurchmesser d (mit der Bernoulli'schen Gleichung)

c) Senkgeschwindigkeit bei Blende nach b) und $F_G = 1500$ N
Mit der Abschätzung des Reibungseinflusses befasst sich Aufgabe 7.10.

***2.26** Eine Schiffsschleuse ermöglicht es Schiffen, ein Flusskraftwerk mit einer Wasserspiegeldifferenz von $H = 5$ m zu passieren. Die quaderförmige Schleusenkammer ist 80 m lang und 10 m breit. Ein Schiff fährt von der Unterwasserseite in die Schleusenkammer ein, das unterwasserseitige Tor wird geschlossen und im oberwasserseitigen Tor wird unter Wasser eine rechteckige Ausgleichsöffnung mit der Fläche $A_2 = 2 \cdot 1$ m geöffnet, $\alpha = 0{,}65$. Die Kammer füllt sich bis zum Oberwasserniveau, das Oberwassertor wird geöffnet und das Schiff kann weiterfahren.

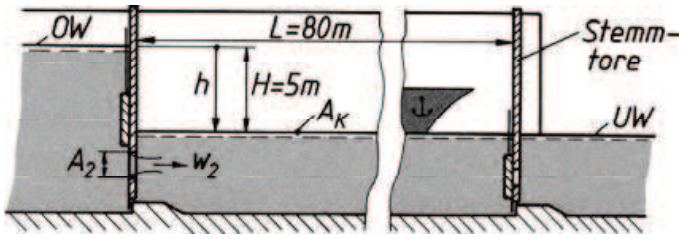
a) Ermitteln Sie die Strömungsgeschwindigkeit w_2 kurz nach Öffnen der Ausgleichsöffnung ($H = 5$ m).

b) Mit welcher Geschwindigkeit $\dot{h}$ steigt der Kammerspiegel anfänglich?

c) Stellen Sie allgemein die Differentialgleichung für derartige Füllvorgänge auf (quasistationäre Strömung kann vorausgesetzt werden).

d) Lösen Sie die Differentialgleichung (Trennung der Variablen!) und ermitteln Sie eine Formel für die Fläche A_2 der Ausgleichsöffnung, wenn die Füllzeit T gegeben ist.

e) Welcher Wert A ergibt sich bei obigem Beispiel, wenn $T = 10$ min, $\alpha = 0{,}75$?



***2.27** Beantworten Sie die Fragen a) bis e) von Aufgabe 2.26 sinngemäß für die Entleerung einer Schleusenkammer mit den Daten $H = 8$ m, $L = 60$ m, $B = 8$ m, $\alpha = 0{,}70$, $T = 7$ min.

***2.28** Eine Ventilatorleitung führt Luft mit $w_1 = 20$ m/s und einem Überdruck von 500 mm WS. Für Messzwecke wurde ein Loch mit $d = 10$ mm gebohrt. Aus Nachlässigkeit wurde dieses Loch nach der Messung nicht mehr verschlossen. Luftdichte $\rho = 1{,}21$ kg/m^3. Man berechne:

a) Austrittsgeschwindigkeit w_a der Luft durch das Loch,

b) austretenden Volumenstrom $\dot{V}$, wenn mit einer Ausflusszahl $\alpha = 0{,}6$ gerechnet werden kann,

c) jährlichen Mehrverbrauch an elektrischer Arbeit des Ventilators in kWh/Jahr bei durchgehendem Betrieb und einem Gesamtwirkungsgrad der Ventilatoranlage von $\eta = 0{,}5$.

2.29 Ein Rasensprenger soll 500 *l* Wasser pro Stunde verspritzen. Überdruck des Wassers: 1,5 bar.

Wie viele Löcher mit dem Durchmesser 1 mm muss das Rohr des Rasensprengers erhalten (Ausflussziffer $\alpha = 0{,}6$)?

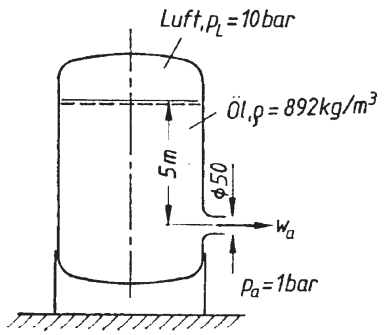
2.30 Wasserkraftanlage wie in Beispiel 2.5, jedoch mit folgenden geänderten Daten: $p_1 = 6$ bar, $d_1 = 1{,}5$ m, $h_1 = 2000$ m, $p_2 = 62$ bar, $d_2 = 1{,}2$ m, $h_2 = 1386$ m, $\dot{V} = 10\ \mathrm{m^3/s}$, $\zeta_{2-3} = 4$ (bezogen auf $d = 1{,}4$ m), $h_3 = 1420$ m.

Beantworten Sie die Fragen a), b), c) genau wie im Beispiel.

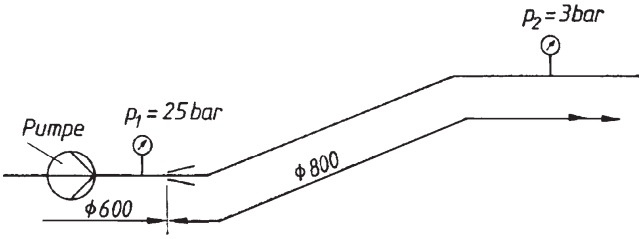
2.31 a) Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit w_a und der Massenstrom $\dot{m}$ aus dem Behälter ohne Berücksichtigung von Verlusten?

b) Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit und der Massenstrom $\dot{m}$, wenn durch einen Rohransatz und ein Ventil Austrittsverluste von

$\Delta p_v = 2{,}5\ \rho \dfrac{w_a^2}{2}$ entstehen?



****2.32*** Ölpipeline: Durch ein Stahlrohr mit einem Durchmesser von 800 mm werden 620 kg/s Öl gepumpt, $\rho = 900\ \mathrm{kg/m^3}$. Um den Widerstandsbeiwert der Leitung zu ermitteln, wird an zwei Stellen der statische Druck gemessen.



Bei Messstelle 1 hat das Rohr einen Durchmesser von 600 mm, erweitert sich kurz darauf auf 800 mm, 20 km weiter folgt Messstelle 2, welche 200 m höher liegt als Messstelle 1.

a) Wie groß ist der Druckverlust Δp_v zwischen den Punkten 1 und 2?

b) Wie groß ist der Widerstandsbeiwert $\zeta_{1,2}$ bezogen auf einen Rohrquerschnitt mit ∅ 800 mm?

c) Die Pumpe saugt das Öl aus einem Behälter (Punkt 0) unmittelbar vor der angegebenen Rohrleitung, $p_0 = 0$, $h_0 = h_1$; ∅ 600 mm. $\zeta_{0,1} = 5{,}5$. Man berechne: spezifische Stutzenarbeit Y, hydraulische Leistung P_h, Wellenleistung P_W für $\eta_p = 0{,}82$; elektrische Leistung P_{el} für $\eta_{mot} = 0{,}92$.

2.33 Die Druckrohrleitung eines Kraftwerkes hat bis Punkt *A* vor der Düse einen Durchmesser von 0,4 m, und Verluste von

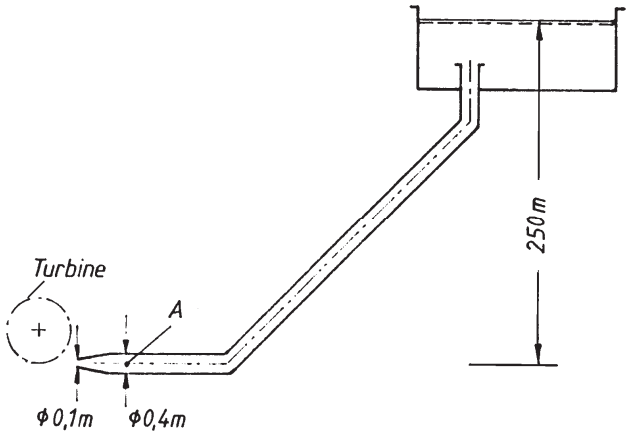
$$\Delta p_v = 8\frac{w_A^2}{2}\rho.$$

Die Düsenverluste betragen

$$\Delta p_v = 0{,}1\frac{w_A^2}{2}\rho,$$

der Strahldurchmesser $d = 100$ mm.
Die geodätische Fallhöhe beträgt 250 m.

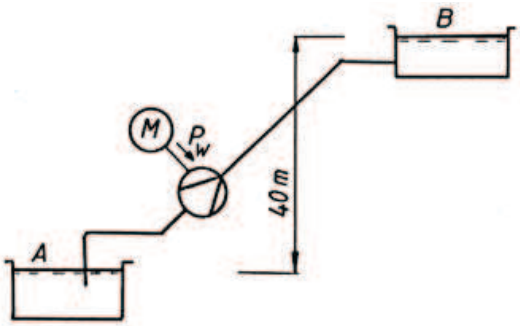
a) Wie groß ist der Druck bei Punkt A?
b) Wie groß ist der Durchfluss in kg/s?



****2.34*** Pumpenanlage; $\dot{V} = 0{,}5$ m³/s. Rohrleitung ∅ 500; $\zeta_{A-B} = 9$.
Pumpenwirkungsgrad $\eta_p = 0{,}80$.

Man ermittle:

a) spezifische Förderarbeit *Y* der Pumpe
b) Förderhöhe *H* der Pumpe
c) dem Wasser von der Pumpe übertragene hydraulische Leistung P_h
d) Leistungsbedarf an der Welle P_W

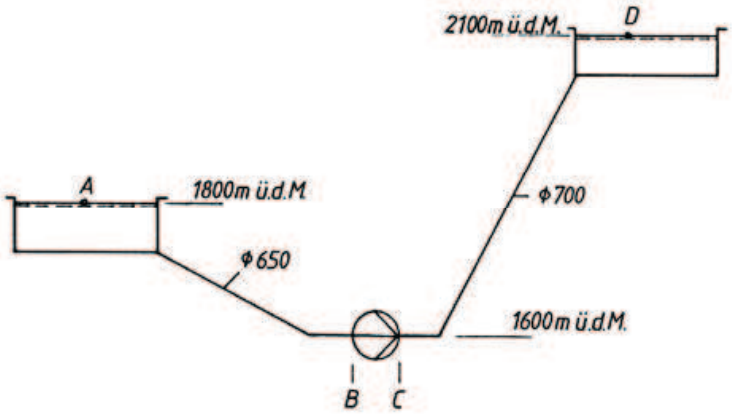


****2.35*** Ein Pumpwerk liefert Wasser aus einer Bachfassung durch eine Talsenke in ein höher liegendes Staubecken eines Kraftwerkes. $\dot{m} = 600$ kg/s.

Verluste: A–B ... $\zeta = 5$
C–D ... $\zeta = 6$

Man ermittle:

a) spezifische Förderarbeit *Y* und Förderhöhe *H* der Pumpe
b) dem Wasser von der Pumpe übertragene hydraulische Leistung P_h
c) Leistungsbedarf an der Welle bei einem Pumpenwirkungsgrad $\eta_p = 0{,}75$
d) Drücke in Punkt *B* und *C*

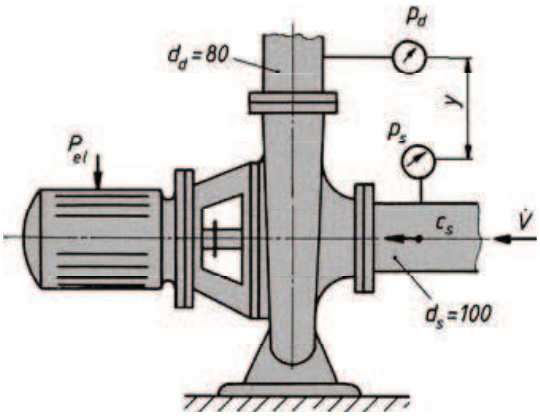


2.36 An einer Kreiselpumpe wurden zur Leistungsermittlung folgende Versuchswerte aufgenommen:

$p_s = 0{,}28$ bar (Unterdruck), $y = 0{,}45$ m
$p_d = 3{,}86$ bar (Überdruck),
$p_0 = 0{,}97$ bar, $\dot{V} = 64$ m^3/h, Wasser.

Man ermittle:

a) spezifische Förderarbeit Y und Förderhöhe H
b) hydraulische Leistung P_h und Wellenleistung P_W für $\eta_p = 0{,}74$
c) P_{el} für $\eta_{mot} = 0{,}89$
d) Absolutdruck im Saugstutzen p_s.



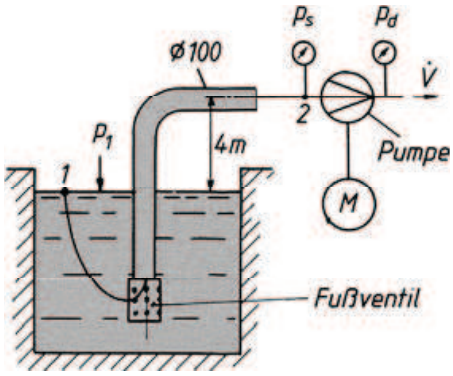
2.37 Pumpenanlage für Wasser mit folgenden Nenndaten (Skizze)

$H = 31$ m, $\dot{V} = 60$ m^3/h, $P_W = 8{,}1$ kW,
$\zeta_{1,2} = 6{,}5$,

Saugrohrdurchmesser $d_s = 100$ mm
Druckleitung $d_d = 80$ mm, $p_1 = 1{,}02$ bar

Man ermittle für den Betrieb mit Nenndaten:

a) p_s,
b) p_d,
c) P_h, η_p



****2.38*** Kolbenpumpe aus Beispiel 1.4. Bestimmen Sie folgende Größen für einen Arbeitszyklus bestehend aus Kolbenhin- und Rückgang:

a) das mit dem Saug- und Förderhub vom tieferliegenden Bassin in den Druckbehälter geförderte Wasservolumen V
b) die theoretische Arbeitszufuhr W_1 an das Wasser (reibungsfrei, im Gegensatz zu Beispiel 1.4 c) soll hier die erweiterte Bernoulli'sche Gleichung verwendet werden)