

Inhaltsverzeichnis

2.1	Grundlegende Begriffe und Eigenschaften	21
2.2	Polynome und rationale Funktionen	34
2.3	Potenz- und Wurzelfunktionen	48
2.4	Exponential- und Logarithmusfunktionen	49
2.5	Trigonometrische Funktionen	58
2.6	Hyperbelfunktionen	69
2.7	Betragsfunktion	70
2.8	Ausblick: Funktionen mit mehreren Veränderlichen	72
2.9	Aufgaben	76

In diesem Kapitel wiederholen wir das Konzept der Funktion und diskutieren qualitative Eigenschaften von Funktionen. Danach stellen wir die wichtigsten Funktionen vor, die in den Ingenieurwissenschaften benötigt werden.

2.1 Grundlegende Begriffe und Eigenschaften

Funktionen sind ein grundlegendes Werkzeug, um voneinander abhängige physikalische Größen darzustellen, z. B. die Änderung der Spannung an einer elektrischen Komponente im Laufe der Zeit, die zeitliche Änderung des Drehwinkels in einem Elektromotor oder die Änderung einer Signalstärke in Abhängigkeit sowohl von Zeit als auch vom Ort.

2.1.1 Was ist eine Funktion?

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die einer gegebenen Eingangsgröße eine eindeutig bestimmte Ausgangsgröße zuordnet. Salopp gesprochen kann eine Funktion verstanden werden als ein Mechanismus, der aus einer gegebenen Eingangsgröße genau eine Ausgangsgröße produziert (Abb. 2.1).

Abb. 2.1 Die Funktion: „quadriere die Eingangsgröße“ produziert aus einer gegebenen Eingangsgröße x genau eine Ausgangsgröße x^2

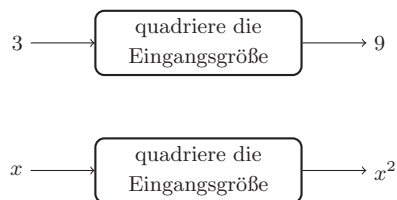
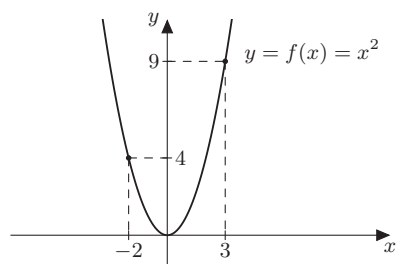


Abb. 2.2 Funktionsgraph der Funktion „quadriere die Eingangsgröße“. Die Eingangsgröße wird auf der horizontalen Achse und die Ausgangsgröße auf der vertikalen Achse aufgetragen. Das Schaubild ist eine Parabel



- Gibt es zu einer Eingangsgröße mehr als eine Ausgangsgröße, handelt es sich nicht um eine Funktion.

Funktionen $y = f(x)$ können in einem rechteckigen (**kartesischen**) Koordinatensystem grafisch dargestellt werden. Die Eingangsgröße wird auf der horizontalen Achse (**Abszisse**) und die Ausgangsgröße auf der vertikalen Achse (**Ordinate**) aufgetragen (Abb. 2.2).

Das Entscheidende dabei ist die Vorschrift, die verwendeten Bezeichnungen sind nicht wesentlich. Übliche mathematische Bezeichnungen sind x für die Eingangsgröße, y für die Ausgangsgröße und f für die Funktion. In konkreten Problemen werden in der Regel problemspezifische Bezeichnungen, also auch andere Buchstaben als x und y verwendet.

Beispiel 2.1 Leistung im Stromkreis

Die Leistung P (Einheit Watt W) in einer Schaltung ist gegeben als Produkt aus Strom und Spannung:

$$P = U \cdot I$$

Mit dem ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$ folgt

$$P = R \cdot I^2.$$

Betrachtet man die Leistung als Funktion des Stroms, so ergibt sich

$$P(I) = R \cdot I^2.$$

Die Funktion ist für alle Werte definiert und das Schaubild der Funktion ist ebenfalls eine Parabel (Abb. 2.3).

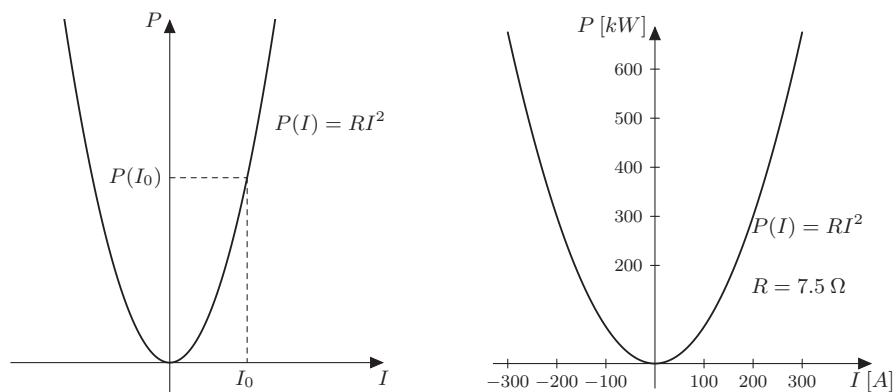


Abb. 2.3 Die Funktion $P(I) = R \cdot I^2$ qualitativ (links) und quantitativ für konkrete Zahlenwerte von I und R (rechts). Bei der quantitativen Darstellung physikalischer Zusammenhänge müssen die Einheiten an den Achsen angegeben werden

Reelle Funktion

Eine **reelle Funktion** f ist eine Abbildung, die jeder reellen Zahl $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl $y = f(x) \in W \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet. Man spricht auch von einer **Funktion** f in Abhängigkeit von x und bezeichnet dies mit

$$f : D \rightarrow W, \quad y = f(x).$$

Die Variable x wird als **Argument** oder als **unabhängige Variable** und die Variable y als **Funktionswert** oder als **abhängige Variable** bezeichnet. D heißt **Definitionsbereich** und W heißt **Wertebereich** der Funktion.

Beispiel 2.2 Das ohmsche Gesetz als funktionaler Zusammenhang

Fließt ein elektrischer Strom I durch einen ohmschen Widerstand R , so fällt nach dem ohmschen Gesetz an R die Spannung

$$U = R \cdot I \quad (2.1)$$

ab. Der Spannungsabfall U hängt von R und von I ab. Interessieren wir uns für die Abhängigkeit der Spannung U vom Strom I , so liefert (2.1) die Beziehung

$$U(I) = R \cdot I$$

eine Funktion. Jedem Strom I wird die Spannung $U(I)$ zugeordnet, der Widerstand R bleibt fest.

Abb. 2.4 Die funktionale Abhängigkeit der Spannung U vom Strom I bei festem Widerstand R . Zum Strom I_0 ergibt sich die Spannung $U(I_0)$

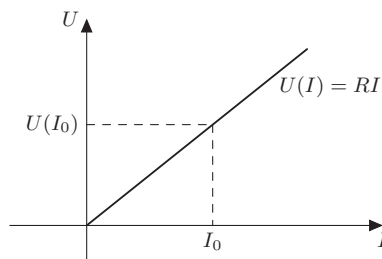
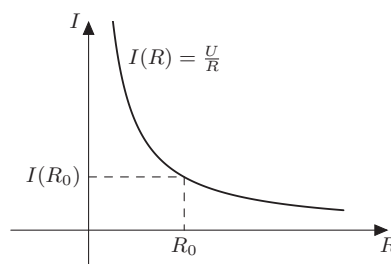


Abb. 2.5 Interessiert man sich für die Abhängigkeit des Stroms vom Widerstand bei konstanter Spannung, erhält man einen anderen funktionalen Zusammenhang als in Abb. 2.4. Hier muss zusätzlich der Definitionsbereich eingeschränkt werden



Das Schaubild dieser Funktion ist in Abb. 2.4 in einem rechteckigen Koordinatensystem dargestellt. Die unabhängige Variable I wird auf der horizontalen Achse abgetragen, der Funktionswert U , d. h. die abhängige Variable, wird auf der vertikalen Achse abgetragen. Das Bild von $U(I)$ ist eine Gerade mit der Steigung R .

Man kann aber auch danach fragen, wie der Strom bei konstanter Spannung vom Widerstand abhängt. Löst man (2.1) nach I auf, erhält man $I = \frac{U}{R}$. Bei konstanter Spannung erhält man also die Funktion

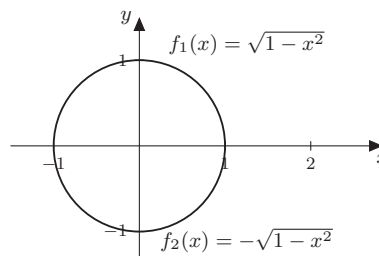
$$I(R) = \frac{U}{R}.$$

Hier darf man für R nicht alle reellen Zahlen einsetzen. Aus formalen Gründen kann man nicht $R = 0$ einsetzen, da dies zu einer Division durch Null führen würde. Es ist physikalisch nicht sinnvoll, negative Werte für R einzusetzen, denn Widerstände sind nicht negativ. Deshalb ist für eine Funktion nicht nur der Funktionsausdruck $I(R) = \frac{U}{R}$ wichtig, sondern auch der **Definitionsbereich**, d. h. die Teilmenge D der reellen Zahlen, aus der man die Werte der unabhängigen Variablen, hier R , nimmt. Man schreibt:

$$I(R) = \frac{U}{R}, \quad R > 0$$

Das Bild ist eine sogenannte Hyperbel (Abb. 2.5).

Abb. 2.6 Die implizite definierte Kurve $x^2 + y^2 = 1$ stellt den Einheitskreis dar. Zur expliziten Darstellung benötigt man zwei Funktionen, die den oberen und den unteren Halbkreis beschreiben



- Die Rolle der abhängigen und unabhängigen Variablen kann sich ändern, je nachdem, unter welcher Fragestellung man ein Problem betrachtet. Sowohl mathematisch formale Gründe als auch anwendungsbezogene Überlegungen können dazu führen, dass der Definitionsbereich einer Funktion eingeschränkt werden muss.

Funktionen können unterschiedlich angegeben werden. Am häufigsten ist die bisher verwendete **explizite Darstellung** durch einen nach der abhängigen Variable aufgelösten Ausdruck wie z. B. $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$.

In der Praxis werden Sie häufig Messungen durchführen, um funktionale Abhängigkeiten experimentell zu ermitteln. Sie erhalten dann Datensätze der Form $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$, also **Wertetabellen**. Auch auf diese Weise lässt sich eine Funktion darstellen.

Eine weitere Darstellungsform für Funktionen ist die **implizite Darstellung**.

Beispiel 2.3

Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschreibt eine Punktmenge in **impliziter Form**.

Sie besteht aus allen Punkten (x, y) , die diese Gleichung erfüllen. Dies sind gerade die Punkte auf dem Einheitskreis (Abb. 2.6).

Um mit impliziten Ausdrücken arbeiten zu können, versucht man in der Regel, die definierende Gleichung nach y aufzulösen. Allerdings wird durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ keine eindeutige Zuordnung von x -Werten zu y -Werten vorgenommen. Formales Auflösen der Gleichung nach y ergibt nämlich

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Damit definiert die Kreisgleichung implizit zwei Funktionen: den oberen Halbkreis

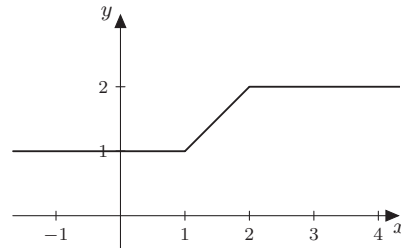
$$y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{mit } -1 \leq x \leq 1 \text{ und } y \geq 0$$

sowie den unteren Halbkreis

$$y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{mit } -1 \leq x \leq 1 \text{ und } y \leq 0. \quad \blacksquare$$

Nicht immer lässt sich der Verlauf einer Funktion mit einer einzigen Funktionsgleichung beschreiben. Vielmehr treten in der Technik auch häufig **stückweise**

Abb. 2.7 Die Funktion $y = f(x)$ besteht aus drei Abschnitten. Für $x \leq 1$ ist $f(x)$ konstant 1, für $1 < x \leq 2$ ist $f(x)$ ein Geradenstück und für $x > 2$ ist $f(x)$ konstant 2



definierte Funktionen auf. Mit diesen Funktionen kann man verschiedene Betriebszustände (z. B. $f(x) = 1$ für „eingeschaltet“ und $f(x) = 0$ für „ausgeschaltet“) beschreiben.

Die Funktion

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und in drei Abschnitten erklärt. Sie besitzt das Schaubild in Abb. 2.7. Diese Funktion weist keine Sprünge an den Übergängen von einem Abschnitt zum nächsten auf.

Weitere Beispiele für stückweise erklärte Funktionen sind die Beschreibung der Balkenbiegung in Abb. 2.24 und das Laden und Entladen eines Kondensators (Beispiel 2.21).

2.1.2 Verkettung von Funktionen

Beim Auswerten der Funktion $y = h(x) = 2x^2$ geht man in zwei Schritten vor: zuerst quadriert man die unabhängige Variable x , dann verdoppelt man das Ergebnis, das man zuvor erhalten hat. Wir können dies als Hintereinanderausführung oder **Verkettung** der Funktionen $y = g(x) = x^2$ und $y = f(x) = 2x$ interpretieren (Abb. 2.8). Dafür schreibt man

$$h(x) = f(g(x)).$$

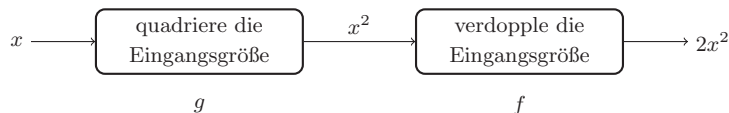


Abb. 2.8 Die Funktion h mit $h(x) = 2x^2$ kann als Hintereinanderausführung $h(x) = f(g(x))$ mit $f(x) = 2x$ und $g(x) = x^2$ interpretiert werden

Bei der Verkettung von Funktionen spielt die Reihenfolge eine Rolle, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.4

Es sei $y = f(x) = 3x + 5$ und $y = g(x) = \frac{x}{2} - 2$. Bestimmen Sie:

1. $f(g(x))$
2. $g(f(x))$.

Lösung:

1.

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2} - 2\right) = 3\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 5 = \frac{3}{2}x - 1$$

2.

$$g(f(x)) = g(3x + 5) = \frac{1}{2}(3x + 5) - 2 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Die beiden Ergebnisse sind offensichtlich unterschiedlich. Beim Verketteten von Funktionen kommt es auf die Reihenfolge an. ■

Beispiel 2.5

Gegeben sind die Funktionen $y = f(x) = x^2 - 1$ und die Funktion $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$. Bestimmen Sie $g(f(x))$. Achten Sie dabei auf die Definitions- und Wertebereiche der Funktionen.

Lösung: Die Funktion $y = f(x) = x^2 - 1$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und nimmt Werte $y \geq -1$ an, während die Funktion g nur für $x \geq 0$ definiert ist. Verkettet ergibt sich folgende neue Abbildung:

$$y = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$$

Die verkettete Funktion ist nun nur noch für $|x| \geq 1$ definiert. ■

- Beim Verketteten von Funktionen muss der Definitionsbereich der inneren Funktion u. U. so eingeschränkt werden, dass ihr Wertebereich nicht größer ist als der Definitionsbereich der äußeren Funktion.

Beispiel 2.6 Anwendung der Verkettung

Für einen industriellen Fertigungsprozess wird Wasser in einem Becken mit 2 m Tiefe gespeichert. Der Wasserstand über dem Boden wird mit einem Sensor gemessen. Der Sensor wandelt den Pegel x (in m) in ein Spannungssignal U (in V) um:

$$U = f(x) = -5 \text{ V} + 5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot x.$$

Der Wasserstand von 0 m bis 2 m wird in ein Spannungssignal zwischen -5 V und 5 V abgebildet.

In Abhängigkeit der Spannung wird ein Zuflussventil geöffnet gemäß der Funktion:

$$z(U) = \begin{cases} -10 \frac{1}{\text{V}} \cdot U, & U \leq 0 \\ 0, & U > 0 \end{cases}$$

Für eine negative Spannung U wird Wasser nachgeführt, und zwar proportional zum Wert der Spannung. Bei positiver Spannung schließt das Ventil.

Die Verkettung der Funktionen $z(U)$ und $U(x)$ beschreibt die Zuflussrate in $\frac{1}{\text{m}}$ in Abhängigkeit vom Pegelstand x (in m). Für $U \geq 0\text{ V}$, d. h. für $x \geq 1\text{ m}$ und für $U \leq 0\text{ V}$, d. h. für $x \leq 1\text{ m}$, folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} Z(x) &= z(U(x)) \\ &= \begin{cases} -10 \frac{1}{\text{V}} \cdot (-5\text{ V} + 5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot x) = 50 - 50 \frac{1}{\text{m}} \cdot x, & x \leq 1\text{ m} \\ 0, & x > 1\text{ m} \end{cases} \end{aligned}$$

Für Pegelstände im Becken unter 1 m wird Wasser zugeführt. Steht der Pegel über 1 m, wird der Zufluss gestoppt.

2.1.3 Umkehrung von Funktionen

Für die Auflösung von Gleichungsbeziehungen spielen Umkehrfunktionen eine entscheidende Rolle, da sich bei Hintereinanderausführung Funktion und Umkehrfunktion gegenseitig aufheben.

Umkehrfunktion

Unter der Umkehrfunktion f^{-1} zu einer Funktion f versteht man diejenige Funktion, für die

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

für alle x aus dem Definitionsbereich von f gilt.

- **Achtung!** Der Exponent -1 in $f^{-1}(y)$ ist in diesem Zusammenhang keine Potenz, sondern kennzeichnet die Umkehrfunktion.

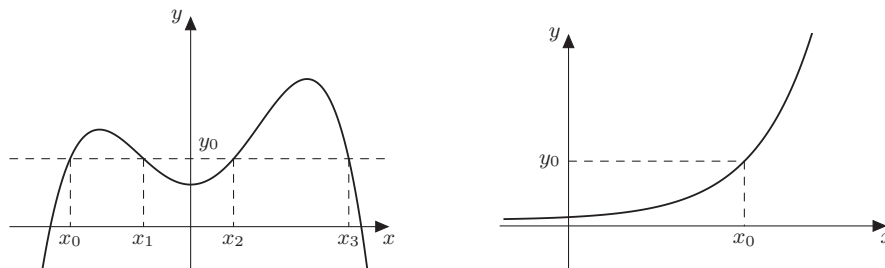


Abb. 2.9 Die Funktion links ist nicht umkehrbar, denn es gibt mit den x -Werten x_0, x_1, x_2 und x_3 vier Werte im Definitionsbereich, deren Funktionswert y_0 ist. Die Funktion rechts ist umkehrbar, denn es gibt für jedes y_0 genau einen Wert x_0 aus dem Definitionsbereich, dessen Funktionswert y_0 ist

Beispiel 2.7

Weisen Sie nach, dass $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ die Umkehrfunktion zu $f(x) = 3x$ ist.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass die Hintereinanderausführung $f^{-1}(f(x))$ für alle x wieder x ergibt. Dazu definieren wir eine Hilfsvariable $z = f(x) = 3x$. Damit ist

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(z) = \frac{z}{3} = \frac{3x}{3} = x.$$

Also ist f^{-1} tatsächlich die Umkehrfunktion zu f . ■

Eine Funktion muss eine Voraussetzung erfüllen, damit sie umkehrbar ist.

Umkehrbare Funktionen

Eine Funktion ist **umkehrbar**, wenn zu jedem y aus dem Wertebereich der Funktion genau ein x aus dem Definitionsbereich gehört.

Dies ist dann der Fall, wenn jede waagerechte Gerade den Funktionsgraphen höchstens einmal schneidet (Abb. 2.9): Bei der linken Funktion gibt es mit den x -Werten x_0, x_1, x_2 und x_3 vier Werte im Definitionsbereich, deren Funktionswert y_0 ist. Daher ist die Funktion nicht umkehrbar. Bei der rechten Funktion gibt es mit x_0 genau einen Wert aus dem Definitionsbereich y_0 , dessen Funktionswert y_0 ist. Daher ist sie umkehrbar.

Bei der Bestimmung der Umkehrfunktion geht man in zwei Schritten vor.

Bestimmung der Umkehrfunktion

Schritt 1: Löse $y = f(x)$ nach x auf: $x = f^{-1}(y)$.

Schritt 2: Vertausche die Bezeichnungen x und y . Man erhält $y = f^{-1}(x)$.

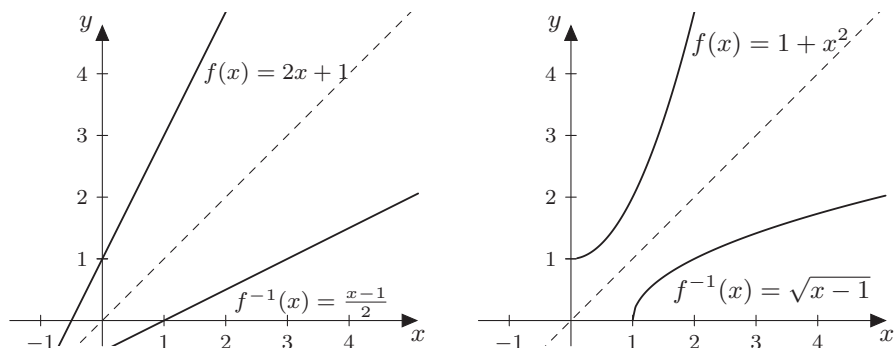


Abb. 2.10 Die Funktion $y = f(x) = 2x + 1$ mit ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ (links) und die Funktion $y = f(x) = 1 + x^2$ mit ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ (rechts) (vgl. Beispiel 2.8)

Beispiel 2.8

- Die lineare Funktion $y = f(x) = 2x + 1$ mit $D = W = \mathbb{R}$ ist umkehrbar. Beim Bestimmen der Umkehrfunktion suchen wir eine Funktion f^{-1} , die die Wirkung von f rückgängig macht. Das bedeutet, dass f^{-1} das Argument $2x + 1$ wieder auf x abbilden muss:

$$f^{-1}(2x + 1) = x$$

Schritt 1: Wir lösen $y = 2x + 1$ nach x auf und erhalten $x = \frac{y-1}{2}$.

Schritt 2: Die Umbenennung liefert

$$y = \frac{x-1}{2}.$$

Die Umkehrfunktion lautet

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Die Funktionsgraphen von $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ liegen in einem kartesischen Koordinatensystem spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden $y = x$ (Abb. 2.10, links).

- Wir bestimmen die Umkehrfunktion zu $y = f(x) = 1 + x^2$ mit $x \geq 0$:

Schritt 1: Auflösen nach x : $y = 1 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$, denn nur für die positive Wurzel erhält man Werte aus dem Definitionsbereich von f .

Schritt 2: Umbenennen: $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ mit $x \geq 1$ und $y \geq 0$ (Abb. 2.10, rechts). ■

Weitere Beispiele für Paare von Funktionen, bei denen die eine jeweils die Umkehrfunktion der anderen ist, sind Potenz- und Wurzelfunktionen (siehe Abschn. 2.3) und Exponential- und Logarithmusfunktionen (siehe Abschn. 2.4).